MoBi Mathematik B
1. Integralrechnung

Carl Herrmann

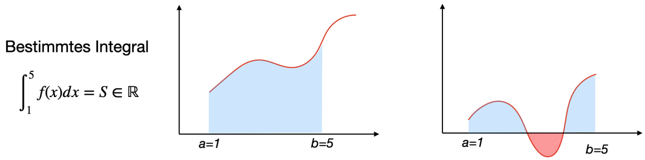
Health Data Science Unit - BioQuant and Medical Faculty Heidelberg

April 18, 2020

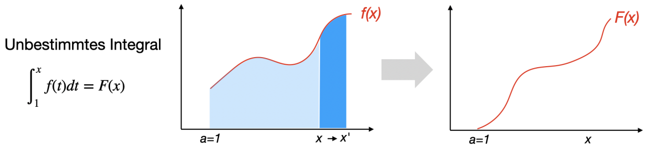
1.1 Einführung

Grundkonzepte

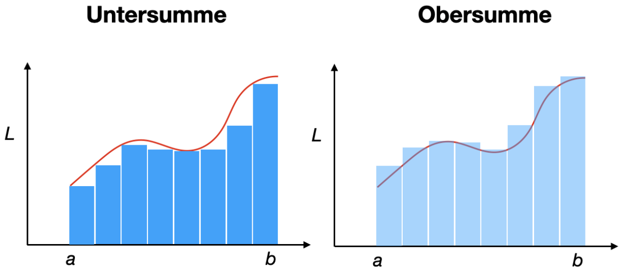
- Bestimmtes Integral:
  - Funktion $\longrightarrow$ reelle Zahl: $f(x) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R} \quad (a, b \in \mathbb{R})$
  - Geometrisch: Fläche unter dem Graphen von $f(x)$



- Unbestimmtes Integral:
  - Funktion $\longrightarrow$ Funktion: $f(x) \longrightarrow F(x) \equiv \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$
  - a = feste reelle Zahl, t = Integrationsvariable $\in [a, x]$



Definition des Integrals nach Riemann



- Riemann-Integral: Approximation der Fläche unter dem Graphen als Summe von n Rechtecken
- Linker Rand der Rechtecke: x_i mit $i = 1, \ldots, n$ und $x_1 = a$ (zusätzlich ist $x_{n+1} = b$)
- Breite der Rechtecke: Δx_i mit $i = 1, \ldots, n$ (Sonderfall: $\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}$)

Definition des Integrals nach Riemann

- Kleinster Funktionswert auf dem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$:

$$f_k^- = \min_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

- Größter Funktionswert auf dem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$:

$$f_k^+ = \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

- Untersumme: $S_n^- = \sum_{i=1}^{n} f_i^- \cdot \Delta x_i$
- Obersumme: $S_n^+ = \sum_{i=1}^{n} f_i^+ \cdot \Delta x_i$
- Es gilt:

$$\boxed{S_n^- \quad \leq \quad S = \int_a^b f(x)dx \quad \leq \quad S_n^+}$$

Definition des Integrals nach Riemann

- Eine Funktion $f(x)$ ist **Riemann-integrierbar**, wenn für immer kleinere Unterleitungen von $[a, b]$ die Unter-/Obersummen gegen S konvergieren.
- Wenn $\Delta x = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} S_n^- = \lim_{\Delta x \to 0} S_n^+$$

- Beachte: wenn $\Delta x \to 0$, dann $n \to \infty$ da die Δx_i weiterhin eine Unterteilung von $[a, b]$ darstellen!

Riemann-Summe

- Neben der Ober-/Untersumme kann auch die **Riemann-Summe** definiert werden
- Sei ξ_i ein **beliebiger Wert** im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$
- Man definiert die Riemann-Summe als

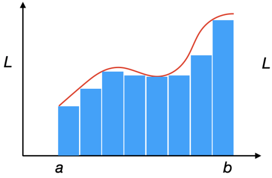
$$S_n = \sum_{i=1,\ldots,n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

- Wenn $f(x)$ Riemann-integriebar ist, dann gilt

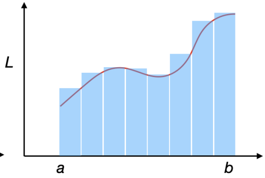
$$\lim_{\Delta x \to 0} S_n = \int_a^b f(x) dx$$

Graphische Darstellung

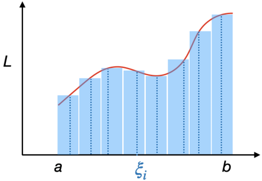
Untersumme



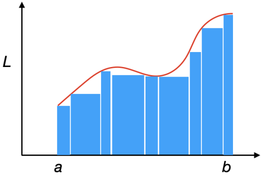
Obersumme



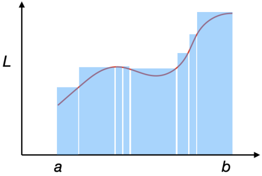
Riemann-Summe



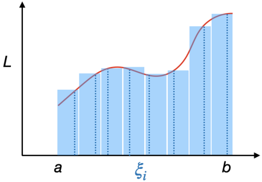
Untersumme
mit variabler Unterteilung



Obersumme
mit variabler Unterteilung

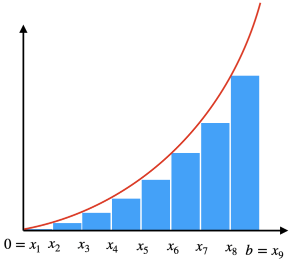


weitere **Riemann-Summe**



Beispiel (1)

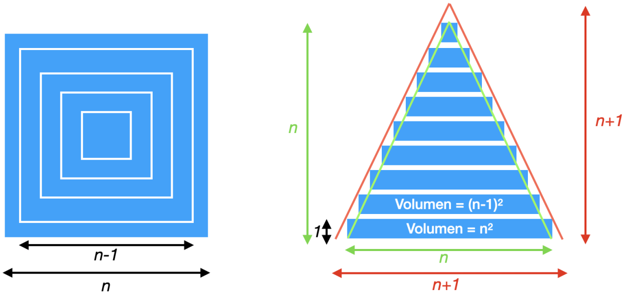
- Funktion $f(x) = x^2$
- Integral zwischen 0 und b: $\int_0^b x^2 dx$
- n Intervalle definiert durch $x_i = (i-1)\frac{b}{n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $x_{n+1} = b$
- Breite der Intervalle: $\Delta x_i = \frac{b}{n}$
- Fläche eines Rechtecks: Breite $(\frac{b}{n})$ × Höhe (x_i^2)



- Untersumme
  $S_n^- = \sum_{i=1}^n \frac{b}{n}\left((i-1)\frac{b}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{b}{n}\right)^3 (i-1)^2$
- Obersumme
  $S_n^+ = \sum_{i=1}^n \frac{b}{n}\left(i\frac{b}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{b}{n}\right)^3 i^2$

Beispiel (2)

- $S_n^- = \left(\frac{b}{n}\right)^3 (0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2)$
- $S_n^+ = \left(\frac{b}{n}\right)^3 (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$
- Beide Summen sind **unendliche Reihen**, deren Grenzwerte wir bestimmen müssen!



Volumen der blauen Pyramide: $V = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$

Volumen der grünen Pyramide: $V^- = \frac{1}{3}$ **Basis** $\cdot$ **Höhe** $= \frac{1}{3} n^2 \cdot n$

Volumen der roten Pyramide: $V^+ = \frac{1}{3}(n+1)^2 \cdot (n+1)$

Beispiel (3)

- Daher gilt:

$$V^- = \frac{1}{3}n^3 < 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 < V^+ = \frac{1}{3}(n+1)^3$$

$$\overset{\cdot \frac{b^3}{n^3}}{\iff} \quad \frac{1}{3}b^3 < \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) < \frac{1}{3}b^3(1 + \frac{1}{n})^3$$

- Daher $\lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{1}{3}b^3$
- Für die Ober-/Untersummen gilt also:

$$\underbrace{S_n^- = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b}{n}\right)^3 (i-1)^2}_{\to \frac{1}{3}b^3} \quad < \quad \int_0^b x^2 dx \quad < \quad \underbrace{S_n^+ = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b}{n}\right)^3 i^2}_{\to \frac{1}{3}b^3}$$

- Es gilt daher:

$$\boxed{\int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3}b^3}$$

Schreibweise

- für Riemann-integrierbare Funktionen gilt also:

$$\lim_{\Delta x \to 0; n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) \quad = \quad \int_a^b f(x) dx$$

- a (b) ist die **untere (obere) Integrationsgrenze**
- die Funktion f ist der **Integrand**
- dx ist das **Differenzial**
- x im Differenzial dx ist die **Integrationsvariable**

Schreibweise

Achtung:

- die Bezeichnung der Integrationsvariable kann beliebig gewählt werden!
- es gilt also

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy = \dots$$

- die Integrationsvariable muß allerdings verschieden von der oberen/unteren Integrationsgrenze sein!
- $\int_0^x f(t)dt$ macht Sinn, aber nicht $\int_0^x f(x)dx$!

Eigenschaften des Integrals (1)

1. Linearität (1):

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. Linearität (2) :

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

3. Zerlegung des Integrationsintervals:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(Achtung: gilt für beliebige a, b, c, also auch wenn c nicht zwischen a und b liegt!)

Eigenschaften des Integrals (2)

4. Monotonie: wenn $f(x) \leq g(x)$ **für fast alle** $x \in [a, b]$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(Achtung: gilt nur, wenn $a \leq b$!)

5. Weiterhin gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

6. Daraus folgt:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Verständnisfragen

1. Die Dirichlet Sprungfunktion $D(x), x \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{wenn} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Besprechen Sie, ob $D(x)$ nach Riemann integrierbar ist!

2. Ist eine stetige Funktion immer nach Riemann-integrierbar?
3. Welche dieser Ausdrücke machen Sinn
   (wenn ja, was ist deren Wert?):
   - $\int_0^x f(x)dx$
   - $\int_0^x f(x)dt$
   - $\int_0^x f(0)dx$
   - $\int_0^x f(0)dy$
   - $\int_0^x f(t)dz$