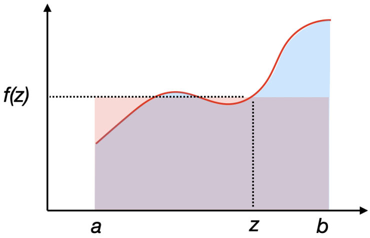
1.2 Hauptsatz der Differentialrechnung

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Mittelwertsatz der Integralrechnung:
Gegeben sei eine stetige Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$; dann gibt es ein $z \in [a,b]$, sodass

$$\int_a^b f(x)dx = f(z)(b-a)$$

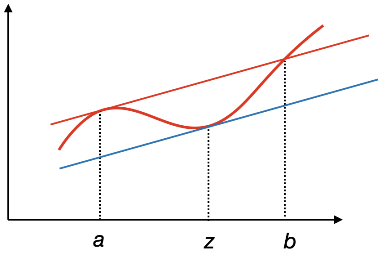


Fläche des roten Rechtecks = blaue Fläche unter der Kurve von f(x)

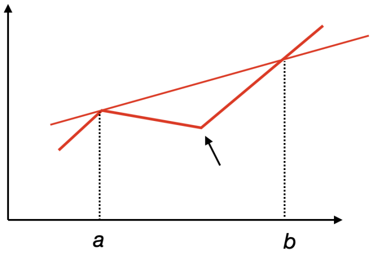
Erinnerung: Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Mittelwertsatz der Differenzialrechnung:
Gegeben sei eine **differenzierbare** Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$; dann gibt es ein $z \in [a,b]$, sodass

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(z)$$



Gegenbeispiel
bei nicht differenzierbarer Funktion



Hauptsatz der Differenzialrechnung

1. Formulierung:

Gegeben sei eine reelle, ableitbare Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x) \equiv F'(x)$ auf $[a,b]$ integrierbar ist; dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2. Formulierung:

Gegeben sei eine reelle, stetige Funktion $f(x)$ auf $[a,b]$; man definiert $F(x)$ als

$$F(x) \equiv \int_a^x f(t)dt.$$

Dann ist die Funktion $F(x)$ ableitbar und es gilt $F'(x) = f(x)$.

Stammfunktion

Definition:
Gegeben sei eine Funktion $f(x)$. Jede **ableitbare** Funktion $F(x)$, sodass gilt $F'(x) = f(x)$ nennt man **Stammfunktion** von $f(x)$

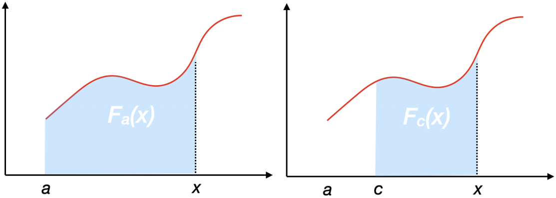
Konsequenz der 2. Formulierung des HDR:

- Die Funktion $F_a(x) \equiv \int_a^x f(t)dt$ besitzt die Eigenschaft $F_a'(x) = f(x)$
- Sie ist also **eine Stammfunktion** von $f(x)$
- Schreibweise: $F(x) = \int f(x)dx$ oder $F = \int f$

Stammfunktion

Was ist mit der Funktion $F_c(x) \equiv \int_c^x f(t)dt$?

- Es gilt : $F_c(x) \equiv \int_c^x f(t)dt = \underbrace{\int_c^a f(t)dt}_{=K \text{ Konstante}} + \underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{F_a(x)}$
- daher: $F_c'(x) = (K + F_a(x))' = \underbrace{K'}_{=0} + \underbrace{F_a'(x)}_{=f(x)} = f(x)$
- also ist jede Funktion $F_a(x) \equiv \int_a^x f(t)dt$ für ein beliebiges a Stammfunktion von $f(x)$
- Stammfunktionen sind also **bis auf eine Konstante** definiert!



Interpretation des HDR (2. Formulierung)

- der Hauptsatz der Differenzialrechnung besagt, dass die **Ableitung der Stammfunktion einer Funktion** $f(x)$ die Funktion $f(x)$ selbst ist…
- kann die Stammfunktion explizit bestimmt werden, dann lässt sich das einfach überprüfen!
  - wir hatten für $f(x) = x^2$ gezeigt, dass $F(x) \equiv \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3$
  - also können wir die Ableitung bestimmen: $F'(x) = (\frac{1}{3}x^3)' = x^2 = f(x)$
- aber auch für Stammfunktionen, die sich nicht explizit bestimmen lassen gilt es auch!

$$F(x) = \int_1^x (\sqrt{ln(t)} - \cos^{17} t)dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \sqrt{ln(x)} - \cos^{17} x$$

Interpretation des HDR (1. Formulierung)

- 1. Formulierung: wenn eine Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x)$ bekannt ist, dann lassen sich Integrale bestimmen über

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad ; \quad \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

- Wichtige Stammfunktionen:

Funktion	Stammfunktion
a	$ax + C \quad (a \in \mathbb{R})$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$

Zusammenfassung

MWS
Differenzialrechnung

$$f(b) - f(a) = f'(z)(b - a)$$

MWS
Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)dx = f(z)(b - a)$$

HDR
1. Formulierung

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

HDR
2. Formulierung

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

1.2 Verständnisfragen

1. Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ (schauen Sie sich die Verständnisfragen aus Mathe A - Teil 6.4 nochmal an...)
2. Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 e^{-x}\,dx$
3. Benutzen Sie den MWS der Differenzialrechnung um zu zeigen, dass eine Funktion $f(x)$, deren Ableitung auf $[a,b]$ Null ist, auf diesem Interval auch konstant ist

$$f'(x) = 0 \ (\forall x \in [a,b]) \quad \Rightarrow \quad f(x) = C \ (\forall x \in [a,b])$$

(Beweis über Kontraposition: nehmen Sie an, dass es $x_1, x_2 \in [a,b]$ gibt, sodass $f(x_1) \neq f(x_2)$ und zeigen Sie einen Widerspruch...)