6.1 Folgen

Definition einer Folge

- Viele Prozesse lassen sich beschreiben als eine **diskrete, unendliche** Abfolge von numerischen Werten:
  - täglicher Endstand der Börsenkurse;
  - Abfolge von Ziffern eine Dezimalzahl (z.B. Zahl π).
- Definition einer Folge:

  eine numerische Folge ist ein Abbildung der natürlichen Zahlen in eine Zahlenmenge M (z.B. $\mathbb{R}$):

$$a \; : \quad \begin{array}{c} \mathbb{N} \to M \\ n \to a_n \end{array}$$

- Folge als Ganzes: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder einfach (a_n)

Beispiele

- Folgen können entweder **explizit** oder **rekursiv** definiert werden
- Bei expliziten Folgen können Folgenglieder unabhängig der anderen Glieder bestimmt werden:

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \ ; \quad a_2 = 2.25 \ \ a_{100} = 2.704814$$

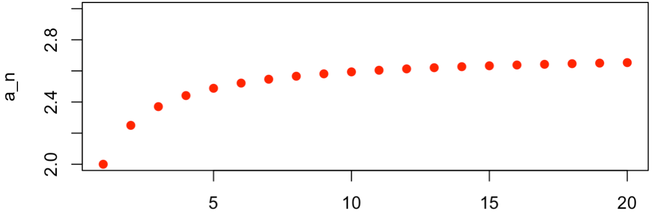
- Bei rekursiven Folgen werden Folgenglieder anhand anderer Folgenglieder bestimmt:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \ \ \text{(Fibonacci Folge)}$$

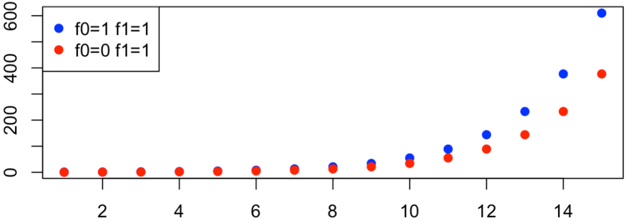
- bei rekursiven Folgen müssen die Anfangswerte definiert werden (also f_0 und f_1 bei der Fibonacci Folge); unterschiedliche Anfangswerte führen zu unterschiedlichen Folgen!

Beispiele

- Beispiel einer expliziten Folge: $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$



- Beispiel einer rekursiven Folge: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ (Fibonacci Folge)



Definitionen - Beschränktheit

- **Beschränktheit:** eine Folge (a_n) heißt beschränkt, falls es eine Zahl a gibt, sodass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq a$$

- **untere/obere Beschränktheit:** eine Folge (a_n) heißt nach unten/nach oben beschränkt, falls es eine Zahl a gibt, sodass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a \quad \text{(untere Beschränktheit)}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a \quad \text{(obere Beschränktheit)}$$

Definitionen - Beschränktheit

- Beispiele:
- $a_n = (-1)^n$ ist Beschränkt, da $|a_n| = 1$
- $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ ist nach **oben beschränkt** da $a_n \leq 1$
- $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ ist nach **unten beschränkt** da $a_n \geq 0$

Definitionen - Monotonie

- eine reelle Folge (a_n) ist **monoton wachsend** wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- eine reelle Folge (a_n) ist **monoton fallend** wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

Anmerkung:

1. Falls diese Eigenschaft erst ab einem gewissen Rang n_0 gilt, kann eine neue Folge b_n definitiert werden, die monoton ist:

$$b_n \equiv a_{n_0+n}$$

2. die **strikte** Monotonie wird definiert durch $a_{n+1} < a_n$ bzw. $a_{n+1} > a_n$.

Beweis der Monotonie

Beweis der Monotonie: verschiedene Möglichkeiten:

1. das Vorzeichen von $a_{n+1} - a_n$ untersuchen und zeigen, dass es stets positiv/negativ ist; oder
2. wenn gilt $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > 0$, untersuchen, ob a_{n+1}/a_n größer oder kleiner 1 ist.

Beispiel des Beweises der Monotonie

Wir betrachten die **rekursiv definierte** Folge $a_{n+1} = 2a_n - (a_n)^2$ mit $a_0 = 1/2$.

1. Wir zeigen mittels vollständinger Induktion, dass $\forall n : a_n > 0$ *(Bitte die Induktion durchführen!)*
2. Da $a_n > 0$ können wir den Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ betrachten, und untersuchen, ob dieser größer oder kleiner als 1 ist!

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 - a_n$$

3. Wir zeigen jetzt, dass a_n nach oben beschränkt ist:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - a_n^2 = 1 - (1 - 2a_n + a_n^2) \\ &= 1 - (1 - a_n)^2 < 1 \text{ (da der Term im quadrat positiv ist!)} \end{aligned}$$

Beispiel des Beweises der Monotonie

4. Daher folgt: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 - a_n > 2 - 1 = 1 \;$ da $a_n < 1$

Also ist die Folge (a_n) **streng monoton wachsend.**

Konvergenzverhalten

- Definition: eine Folge (a_n) ist eine **Nullfolge**, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n| \leq \epsilon$.
- mit Quantoren ausgedrückt:

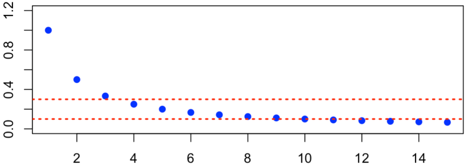
$$\forall \epsilon > 0, \; \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad |a_n| \leq \epsilon$$

- man sagt, dass die Folge (a_n) **gegen 0 konvergiert**, oder den **Grenzwert 0 hat**:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

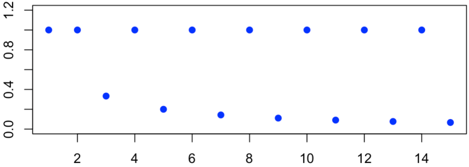
Konvergenzverhalten

- Beispiel: $a_n = 1/n$:



- $\epsilon = 0.3$: $1/n \leq 0.3 \iff n \geq 10/3$ also gilt $n_0 = 4$
- $\epsilon = 0.1$: $1/n \leq 0.1 \iff n \geq 10$ also gilt $n_0 = 10$
- Gegenbeispiel:

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ wenn n gerade} \\ 1/n \text{ wenn n ungerade} \end{cases}$$

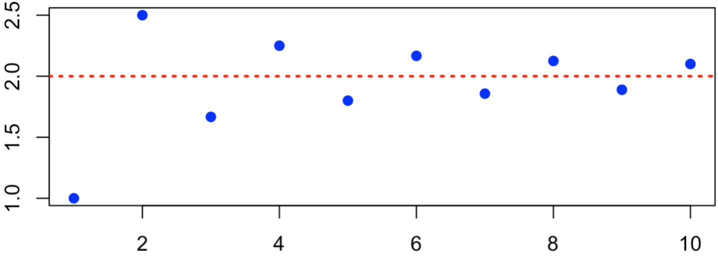


Allgemeines Konvergenzverhalten

- eine Folge (a_n) konvergiert gegen a wenn gilt:

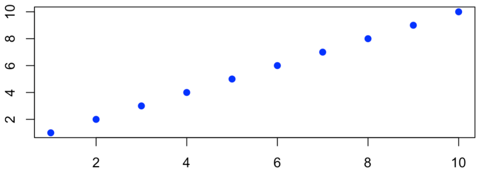
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_0\quad |a_n - a| \leq \epsilon$$

- wenn (a_n) gegen a konvergiert, dann ist $a'_n \equiv a_n - a$ eine Nullfolge!

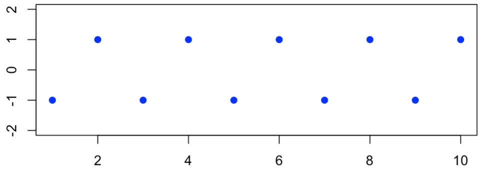


Divergenz

- eine Folge, die nicht konvergent ist, ist **divergent**
- unterschiedliche Arten von Divergenz:
  - die Folge $a_n = n$ divergiert, da sie nicht beschränkt ist



  - die Folge $a_n = (-1)^n$ divergiert, obwohl sie beschränkt ist!



Divergenz

- eine Folge (a_n) geht gegen $+\infty$ wenn

$$\forall A > 0, \exists n_0 : \ \forall n \geq n_0, a_n \geq A$$

- analog wird eine Folge definiert, die gegen $-\infty$ geht.

Majorante - Minorante

- Definition: eine Folge (b_n) ist eine **Majorante** bzw. **Minorante** von (a_n) wenn gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : b_n \geq a_n \quad \text{bzw.} \quad \forall n \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n$$

- auch hier gilt: falls diese Eigenschaften erst ab einem gewissen Rang n_0 gelten, können neue Folgen definiert werden durch $a'_n \equiv a_{n+n_0}$ und $b'_n \equiv b_{n+n_0}$ sodass (b'_n) eine Minorante/Majoraten von (a'_n) ist

Anwendung des Majorantenkriteriums

Majorantenkriterium: wenn es zu einer Folge (a_n) eine Nullfolge (b_n) und einen Wert $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

$$|a_n - a| \leq b_n$$

dann konvergiert (a_n) gegen den Grenzwert a.

Beispiel: zu zeigen: $a_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ konvergiert gegen 1

$$|a_n - 1| = \left|1 + \frac{1}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$$

da die Folge $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge ist folgt, dass (a_n) gegen 1 konvergiert!

Rechenregeln

Wenn (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen sind (mit Grenzwerten a und b) gelten bestimmte Rechenregeln:

- $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a$
- $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$
- $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b$
- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ wenn $b \neq 0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n^{p/q} = a^{p/q}$ für $p, q \in \mathbb{N}$

Weiterhin gilt

- wenn $a_n \leq b_n$, dann gilt $a \leq b$
- wenn $a_n < b_n$, dann gilt nur $a \leq b$ (also kann auch $a = b$ gelten!)

Anwendung der Rechenregeln

Konvergenzverhalten von $a_n = \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+4n+2}$?
Teilen Zähler und Nenner durch n^2:

$$a_n = \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(5 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2})} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3) + \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2}{n}) + \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(5) + \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4}{n}) + \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2}{n^2})} \\
&= \frac{3+0+0}{5+0+0} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Gegenbeispiele

Achtung! Die Rechenregeln gelten nur, wenn die Folgen konvergent sind!

Gegenbeispiel:

- $a_n = n + 1, \; b_n = n$
- beide Folgen **divergieren**, also gilt **nicht** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- linke Seite: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(1) = 1$
- rechte Seite: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = "\infty - \infty"$: nicht definiert!

Vertändnisfragen 6.1

- Ist jede konvergente Folge beschränkt? Ist jede beschränkte Folge konvergent?
- Falls eine Folge (a_n) konvergent ist, bildet $a_{n+1} - a_n$ eine Nullfolge?
- Finden Sie ein Beispiel von 2 konvergenten Folgen (a_n) und (b_n) sodass gilt $a_n < b_n$ und $a = b$.