4.8 Spaltenraum und Nullraum einer Matrix

Einleitung

- Wir verallgemeinern auf nicht-quadratische $n \times m$ Matrizen:
  - Fall 1: mehr Zeilen als Spalten ($n > m$ "hohe" A Matrix)
  - Fall 2: mehr Spalten als Zeilen ($m > n$ "breite" A Matrix)
- Die Existenz von Lösungen des LGS $Ax = b$ hängt vom **Spaltenraum** von A ab

Definitionen:

- **Spaltenraum von** A: $C(A) =$ Spann der Spaltenvektoren

$$\boxed{Ax = b \text{ hat Lösungen} \iff b \in \text{Spaltenraum von } A}$$

Beispiel: "hohe" Matrix

Beispiel: 4 Gleichungen und 3 Unbekannte

$$
\begin{aligned}
Ax = b \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = b
\end{aligned}
$$

mit v_i Spaltenvektoren von A.

Beispiel: "hohe" Matrix

- Hier:

$$\text{Spaltenraum } C(A) = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} ; \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

- Sind die v_i linear unabhängig? **Nein**, da gilt:

$$v_3 = v_1 + v_2 \iff v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

- Daher : $Spann(v_1, v_2, v_3) = Spann(v_1, v_2)$
- also gilt: $\dim C(A) = 2$

Rang einer Matrix

Definition

$$\begin{aligned} \text{Rang } A &= \text{Dimension des Spaltenraums } C(A) \\ &= \text{Anzahl von linear unabhängigen Spaltenvektoren} \\ &= \text{Anzahl von Pivot-Elementen ungleich null} \end{aligned}$$

- Praktische Bestimmung:
  1. Gauß Verfahren auf A
  2. Bestimmung der Anzahl von Pivot-Elementen ungleich null!

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z4 \to Z4 - 4Z1]{\substack{Z2 \to Z2 - 2Z1 \\ Z3 \to Z3 - 3Z1}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z4 \to Z4 - 3Z2]{Z3 \to Z3 - 2Z2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2 Pivot-Elemente ungleich null: $Rang(A) = 2$

Beispiel: "breite" Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z3 \to Z3 - 3Z1]{Z2 \to Z2 - 2Z1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z3 \to Z3 - Z2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2 Pivot-Elemente ungleich null: $Rang(A) = 2$
- Spalten mit Pivot Elementen = **Pivot-Spalten**
- Spalten ohne Pivot Elemente = **freie Spalten**

Nullraum einer Matrix

Sonderfall: Hat $Ax = 0$ immer eine Lösung?

- Ja, $x = 0$ ist immer (triviale) Lösung! Einzige Lösung?
- wir definieren den **Nullraum** einer Matrix A ($n \times m$):

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\}$$

- der Nullraum ist die Lösungsmenge von $Ax = 0$
- Achtung! der Spaltenraum $C(A) \subset \mathbb{R}^n$ hat mit dem Nullraum $N(A) \subset \mathbb{R}^m$ nichts zu tun!

Nullraum bestimmen

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(Zeilenumformungen)}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- 2 Pivot-Spalten; 2 freie Spalten
- Variablen, die mit **freien Spalten** assoziiert sind (hier: x_2, x_4) können beliebige Werte annehmen
- Variablen, die mit **Pivot-Spalten** assoziiert sind (hier: x_1, x_3) können über Rücksubstitution bestimmt werden.

$$x_2 = \lambda; x_4 = \mu \;\Rightarrow\; x_1 = -2(\lambda - \mu); x_3 = -2\mu$$

$$x = (-2(\lambda - \mu),\; \lambda,\; -2\mu,\; \mu) = \lambda(-2, 1, 0, 0) + \mu(2, 0, -2, 1)$$

Dimension des Nullraums

- Der Nullraum wird durch LK der zwei Basisvektoren $u = (-2, 1, 0, 0)$ und $v = (2, 0, -2, 1)$ erzeugt
- Daher: $N(A) = Spann(u, v)$ und $\dim N(A) = 2$

Im Allgemeinen gilt für eine beliebige $n \times m$ Matrix:

$$\boxed{\dim N(A) = \text{Anzahl Spalten } A \text{ - } Rang(A)}$$

Dimension des Nullraums

Beispiel 1: $Ax = 0$ mit A $(n \times n)$ Matrix

- wenn n Pivot-Elemente ungleich null: $\det A \neq 0$, also A invertierbar: $Ax = 0$ hat nur die Lösung $x = 0$
  daher: $\dim N(A) = 0 = n$ Spalten - n Pivot-Elemente
- wenn ein Pivot-Element null ist: $\dim N(A) = 1 = n$ Spalten - $(n-1)$ Pivot-Elemente
  der Nullraum hat Dimension 1, also ist es eine **Gerade in** $\mathbb{R}^n$.

Dimension des Nullraums

Beispiel 2: $Ax = 0$ mit $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(Zeilenumformungen)}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2 Pivot-Elemente ungleich null
- daher: $\dim N(A) = 3 - 2 = 1$
- Bestimmung des Nullraums: eine freie Spalte (x_3): wir setzen $x_3 = 1$ und lösen $Ax = 0$: $x_1 = -1; x_2 = -1$
- daher: $N(A) = Spann(-1, -1, 1)$: **Gerade in** $\mathbb{R}^3$.

Verständnisfragen zu 4.8

- Warum ist der Nullraum einer Matrix $N(A)$ ein Vektorraum?
- Warum ist der Spaltenraum einer Matrix $C(A)$ ein Vektorraum?