Studiengang Molekulare Biotechnologie
Mathematik A
Wintersemester 2019/2020
Carl Herrmann

**– Übungsblatt 8 –**
**Eigenwerte und Eigenvektoren**

### Aufgabe 1

Gegeben sei folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

1. Schreiben Sie die charakteristische Gleichung auf, mit der man die Eigenwerte bestimmen kann (ohne sie zu lösen!)
2. Überprüfen Sie, dass $\lambda_1 = 1/2$ und $\lambda_2 = 2$ Eigenwerte der Matrix sind.
3. Überprüfen Sie, dass $u_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ die entsprechenden Eigenvektoren sind.

### Aufgabe 2

Gegeben sei folgende Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A_t$
- Für welche Werte von $t$ bilden die Eigenvektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$?
- Gleiche Fragen für $B = \begin{pmatrix} 1 & t+2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

### Aufgabe 3

- Überprüfen Sie für eine 2×2 Matrix $A$, dass der Koeffizient des $\lambda^2$ Terms des charakteristischen Polynoms +1 ist;
- Überprüfen Sie für eine 3×3 Matrix (meinetwegen unter Benutzung der Saurus-Regel...), dass der Koeffizient des $\lambda^3$ Terms $-1$ ist.
- Verallgemeinern Sie für eine $n \times n$ Matrix.
- Leiten Sie daraus her, dass
$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$
wobei $\lambda_i$ die Eigenwerte von $A$ sind.
- Leiten Sie daraus ab, dass $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.