Studiengang Molekulare Biotechnologie
Mathematik A
Wintersemester 2019/2020
Carl Herrmann

– Übungsblatt 10 –
Folgen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen (wenn diese Grenzwerte existieren!):

$$(1)\ a_n = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\ ;\quad (2)\ a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{(n+1)(n+2)}\ ;\quad (3)\ a_n = n - 5 - \frac{n^3}{n^2+5}$$

$$(4)\ a_n = \cos n\pi\ ;\quad (5)\ a_n = \cos n(n+1)\pi$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Folge $a_{n+1} = \frac{|a_n|}{2a_n - 1}$ mit dem Startwert $a_1 = b$. Wir betrachten die Fälle $b = -\frac{1}{4}$ und $b = \frac{1}{4}$

1. Unter der Annahme, dass die Folge (a_n) nach a konvergiert, stellen Sie anhand der Rekursionsformel die Bedingung auf, die a erfüllen muß.
2. Zeigen Sie, dass für $b = -1/4$ die Folge monoton ist und nach oben beschränkt;
3. Bestimmen Sie, wie die Folge (a_n) für $b = \frac{1}{4}$ mit der Folge für $b = -\frac{1}{4}$ zusammenhängt *(Bestimmen Sie dazu die ersten Terme der Folge für $b = \frac{1}{4}$)*
4. Begründen Sie, ob die Folgen für die beiden Startwerte konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte.

Aufgabe 3

Wir definieren die Folge $a_{n+1} = \frac{n^2 a_n^2 + c}{n+1}$ für $c \in \mathbb{R}$ und $a_0 = 0$.

1. Bestimmen Sie die Werte der ersten Terme der Folge für $c = -2$ und stellen Sie eine Vermutung über eine mögliche explizite (oder geschlossene) Form der Folge für $c = -2$ (zumindest für $n \geq 2$); beweisen Sie diese Vermutung durch Induktion.
2. Zeigen Sie die Konvergenz der Folge für $c = -2$ und bestimmen Sie den Grenzwert.
3. Zeigen Sie durch Induktion, dass für $c = 1$ gilt:

$$\forall\ n \geq 2 : a_n \geq 1 \text{ und } \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$