# 4.7 Determinante einer Matrix

# Einleitung

Das LGS $Ax = b$ ist **eindeutig** lösbar für ein beliebiges $b$ wenn und nur dann wenn eine der drei Bedingungen erfüllt ist:

- $A$ **invertierbar**; denn, wenn $A^{-1}$ existiert :

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

- alle **Pivot-Elemente** sind ungleich Null;
- die **Determinante** von $A$ ist ungleich Null

Diese drei Bedingungen sind **äquivalent!**

# Was ist die Determinante?

- die Determinante ist eine **reelle Zahl**
- nur für **quadratische Matrizen definiert**
- es gilt: $\det A \neq 0 \iff A$ invertierbar
- Schreibweise:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

# Eigenschaften der Determinante (1)

Diese Eigenschaften gelten für beliebige $n \times n$ Matrizen:

1. $\det I_n = 1$
2. es gilt **für eine 2x2 Matrix**:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3. Zeilentausch in $A$ ändert das Vorzeichen von $\det A$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

4. Multiplizieren einer Zeile mit $\lambda$:

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

# Eigenschaften der Determinante (2)

5. es gilt:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

   Achtung: hier handelt es sich um Linearkombination der ersten Zeile **oder** der zweiten Zeile (nicht gleichzeitig!!)

6. wenn **2 identische Zeilen**, dann $\det(A) = 0$

# Eigenschaften der Determinante (3)

7. Abziehen von $\lambda\cdot$ Zeile $i$ von Zeile $k$ ab (Elimination) ändert die Determinante **nicht**:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c-\lambda a & d-\lambda b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

8. wenn Zeile von 0, dann: $\det A = 0$
9. Determinante einer dreieckigen Matrix:

$$\begin{vmatrix} d_1 & \dots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & d_n \end{vmatrix} = \underbrace{\prod d_i}_{\text{Pivot Elemente}}$$

wenn ein Pivot Element null ist, dann ist $\det A = 0$

# Eigenschaften der Determinante (4)

10. Produkt:
    - $\det(AB) = \det A \ \det B$
    - $\det A^{-1} = 1/\det A$
    - $\det(A^n) = (\det A)^n$
    - $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
11. Transposition:

$$\det A^T = \det A$$

# Berechnung der Determinante

Man benutzt folgende Eigenschaften:

- $\det I_n = 1$;
- Zeilentausch ändert das Vorzeichen;
- Linearkombinationen ändern die Determinante nicht.

Beispiel für $n = 2$:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{(hier wurde Eigenschaft 5. benutzt!)} \\
&= \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}}_{=ad} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix}}_{=-cb} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}_{=0} \\
&= ad - cb
\end{aligned}
$$

# Berechnung der Determinante (n=3)

Allgemein für $3 \times 3$: wir benutzen wiederholt die **Eigenschaft 5.**:

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Die Zerlegung führt zu einer Summe von **27 Termen**, von denen aber viele Null sind (alle Terme bei denen eine Zeile oder Spalte von Nullen entstehen)!

# Berechnung der Determinante (n=3)

Welche der 27 Terme sind ungleich Null?

$$
\begin{aligned}
\det A \;=\; & \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}_{Z2 \leftrightarrow Z3} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}_{Z1 \leftrightarrow Z2} \\
+ & \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{Z1 \leftrightarrow Z2; Z2 \leftrightarrow Z3} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

# Berechnung der Determinante (n=3)

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}\\ &+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(-(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}))\\ &\quad -a_{13}(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32})\end{aligned}$$

Anzahl der Terme bei $n \times n$ Matrix: $n!$

# Berechnung der Determinante: allgemein

Man kann die Determinante einer $n \times n$ Matrix in eine Summe von Determinanten von $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen zerlegen:

1. Entwicklung der Determinante nach einer beliebigen Spalte oder Zeile
2. Zum Beispiel nach der ersten Zeile: Koeffizienten $a_{1j}$
3. Wir definieren die **Untermatrix** $A_{1j}$ als die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix ohne Zeile 1 und Spalte $j$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \ldots$$

# Berechnung der Determinante: allgemein

Bei $n = 3$:

$$detA = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{2\times 2 Det.} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Allgemeine Formel (Laplace Entwicklungssatz):

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}$$

wobei $A_{ij}$ Matrix $A$ ohne $i$-te Zeile und $j$-te Spalte.

# Verständnisfragen zu 4.7

- Zeigen Sie, warum $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$.
  Entwickeln Sie dazu nach der ersten Spalte!
- Wenn $AB$ invertierbar ist, sind dann $A$ und $B$ invertierbar?