4.9 Allgemeine Lösung eines LGS

Einleitung

- Wir verallgemeinern auf nicht-quadratische $n \times m$ Matrizen:
  - Fall 1: mehr Zeilen als Spalten ("hohe" A Matrix)
  - Fall 2: mehr Spalten als Zeilen ("breite" A Matrix)
- Die Existenz von Lösungen des LGS $Ax = b$ hängt vom **Spaltenraum** von A ab

Definitionen:

- **Spaltenraum von** A: $C(A) =$ Spann der Spaltenvektoren

$$Ax = b \text{ hat Lösungen} \iff b \in \text{Spaltenraum von } A$$

Beispiel: "breite" Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right)$$

- Elimination:

1. $\begin{array}{l} Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 - 3Z_1 \end{array}$: $\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right)$

2. $Z_3 - Z_2$: $\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right)$ $(Rang(A)?)$

- Nur lösbar, wenn $b_3 - b_2 - b_1 = 0$, sonst **keine Lösung!**

Allgemeine Methode

1. Man löst $Ax = b$, indem man die **freien Variablen** auf null setzt
   $\rightarrow$ **partikuläre Lösung** x_P
2. Man such such die **allgemeine Lösung** von $Ax = 0$
   $\rightarrow$ **spezielle Lösung** x_N

- Die allgemeine Lösung von $Ax = b$ ergibt sich durch

$$x = x_P + x_N$$

- Warum?

$$A(x_P + x_N) = \underbrace{Ax_P}_{=b} + \underbrace{Ax_N}_{=0} = b$$

Etappe 1: partikuläre Lösung

vorheriges Beispiel: nach Umformung wird die A Matrix in folgende Form gebracht:

$$\text{mit } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- **2 Pivot-Spalten**

  1. und 3. Spalte $\rightarrow$ Pivot-Variablen sind x_1 und x_3
- **2 freie Spalten**

  2. und 4. Spalte $\rightarrow$ freie Variablen sind x_2 und x_4
- Wir suchen die partikuläre Lösung für $x_2 = x_4 = 0$

Etappe 1: partikuläre Lösung

wir setzen: $x_2 = x_4 = 0$

aus der 2. Zeile: $2x_3 + \underbrace{4x_4}_{=0} = 3 \Rightarrow \boxed{x_3 = \frac{3}{2}}$

aus der 1. Zeile: $x_1 + \underbrace{2x_2}_{=0} + 2x_3 + \underbrace{2x_4}_{=0} = 1$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = -2}$

$$\text{Partikuläre Lösung: } x_P = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etappe 2: spezielle Lösung

- Nach Umformung hat A folgende Form: $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Bestimmung des **Nullraums** von A: beliebige Werte für die **freien Variablen**:

wir setzen: $x_2 = \lambda \quad x_4 = \mu$

aus der 2. Zeile: $2x_3 + \underbrace{4x_4}_{=4\mu} = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = -2\mu}$

aus der 1. Zeile: $x_1 + \underbrace{2x_2}_{=2\lambda} + 2x_3 + \underbrace{2x_4}_{=2\mu} = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2\mu - 2\lambda}$

$$\text{spezielle Lösung: } x_N = \begin{pmatrix} 2(\mu - \lambda) \\ \lambda \\ -2\mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung

$$x = x_P + x_N = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge ist eine Untermenge von $\mathbb{R}^4$ **aber** kein Unterraum, da 0 nicht Teil der Lösungsmenge ist!

Beispiel: "hohe" Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- Elimination:

1. $\begin{matrix} Z_2 - Z_1 \\ Z_3 + 2Z_1 \end{matrix} \quad : \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & b_1 \\ 0 & \boxed{1} & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & b_3 + 2b_1 \end{array}\right)$

2. $Z_3 + Z_2 \quad : \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & b_1 \\ 0 & \boxed{1} & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 + b_2 + b_1 \end{array}\right)$

- Nur lösbar, wenn $b_3 + b_2 + b_1 = 0$, sonst **keine Lösung!**

Allgemeine Lösung

- 2 Pivot-Spalten, **keine** freie Spalte
- $N(A) = \{0\}$: keine **spezielle** Lösung (ausser der Null)!
- Partikuläre Lösung: $x_2 = b_2 - b_1$; $x_1 = 2b_1 - b_2$
- Allgemeine Lösung

$$x = x_P + \underbrace{x_N}_{=\{0\}} = \begin{pmatrix} 2b_1 - b_2 \\ b_2 - b_1 \end{pmatrix}$$

  mit der Bedingung $b_3 + b_2 + b_1 = 0$.
- die Matrix A hat **vollen Spaltenrang**, d.h.
  $Rang(A) = 2 =$Anzahl Spalten.

Zusammenfassung: mögliche Fälle

A ist eine $n \times m$ Matrix, $Rang(A) = r$

1. **Voller Spaltenrang ("hohe" Matrix)**
   - linear unabhängige Spalten, keine freien Variablen
   - spezielle Lösung: $N(A) = \{0\} \Rightarrow x_N = \{0\}$
   - eine Lösung ($b \in Sp(A)$) oder keine Lösung ($b \notin Sp(A)$)
2. **Voller Zeilenrang ("breite" Matrix)**
   - $Ax = b$ hat immer eine Lösung
   - $m - r$ freie Variablen $\Rightarrow \dim N(A) = m - r$
   - unendlich viele Lösungen!
3. A **quadratische, invertierbare Matrix**
   - eine einzige Lösung $x = A^{-1}b$
4. **keines dieser Fälle:** $r < m, r < n$
   - keine oder unendlich viele Lösungen

Verständnisfragen zu 4.9

- Begründen Sie, warum folgende Behauptung falsch sind
  1. Die allgemeine Lösung von $Ax = b$ ist eine Linearkombination von x_P und x_N.
  2. Ein Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt höchstens eine spezielle Lösung.
  3. Ist A invertierbar, so gibt es keine Lösung x_N für das homogene Gleichungssystem.
- Was ist der höchstmögliche Rang einer 3×5 Matrix A? In diesem Fall steht ein Pivotelement in jeder (Zeile?/Spalte?) von der Treppenform-Matrix U. Gibt es immer eine Lösung der Gleichung $Ax = b$? Ist sie eindeutig? Welchen Spaltenraum hat A?