MoBi Mathematik A
5. Eigenvektoren, Eigenwerte und Diagonalisierung

Carl Herrmann

Health Data Science Unit - BioQuant and Medical Faculty Heidelberg

November 27, 2019

5.1 Einführung

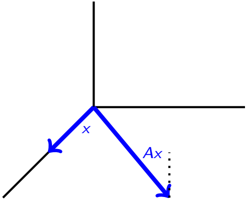
Lineare Abbildung

- Beispiel: eine 3×3 Matrix A definiert eine **lineare Abbildung**:

$$\lambda_A : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ x \to Ax \end{matrix}$$

- Meistens hat Ax eine **andere Richtung** und **Länge** als x:

$$\text{zum Beispiel:} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}_{Ax}$$



anderer Betrag: $|x| = 1; |Ax| = 2\sqrt{6}$

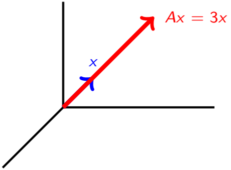
andere Richtung: $\cos\theta = \dfrac{x \cdot Ax}{|x||Ax|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Eigenvektoren

- **Gibt es Vektoren x (mit $x \neq 0$), sodass Ax die gleiche Richtung hat als x?**
- Diese Vektoren erfüllen

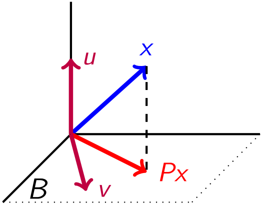
$$Ax = \lambda x \quad (\text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R})$$

- Wenn es solche Vektoren x gibt, dann sind
  - x die **Eigenvektoren** der Matrix A.
  - die dazugehörigen λ sind die **Eigenwerte** der Matrix A.



Beispiel: Projektionsmatrix

- wir betrachten eine Projektionsmatrix P in $\mathbb{R}^3$, die Vektoren auf eine Ebene B projiziert.



- Besondere Vektoren von $\mathbb{R}^3$:
  - $v \in B$: v wird auf sich selbst projiziert: $Pv = v$ daher Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda = 1$
  - daher gilt auch: $\forall x \in \mathbb{R}^3 : Px \in B \Rightarrow \underbrace{P(Px)}_{=P^2x} = Px \Rightarrow P^2 = P$
  - $u \perp B$: u wird auf den Nullvektor projiziert: $Pu = 0$ daher Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda = 0$

Beispiel: Projektionsmatrix

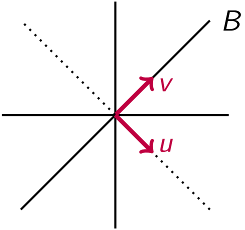
- Welche Matrizen P kommen als Projektionsmatrizen in Frage?
- Wenn $\lambda = 0$ Eigenwert ist, dann hat die Gleichung $Px = 0$ nicht-triviale Lösungen (d.h. Lösungen außerhalb von $x = 0$)
- nur möglich, wenn P **nicht-invertierbar** ist, also wenn P **singulär** ist.

Projektionsmatrix in 2D

Explizites Beispiel in $\mathbb{R}^2$:

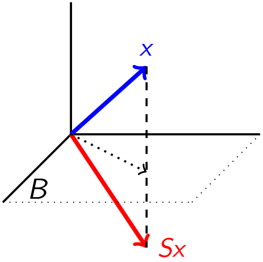
$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Projektionsmatrix}$$

- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ Pv = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot v \ : \ v$ Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda = 1$
- $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ : \ Pu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot u \ : \ u$ Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda = 0$



Beispiel: Spiegelung

- wir betrachten eine Spiegelungsmatrix S in $\mathbb{R}^3$, die Vektoren um eine Ebene B spiegeln.



- Besondere Vektoren von $\mathbb{R}^3$:
  - $v \in B$: v wird auf sich selbst gespiegelt: $Sv = v$ daher Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda = 1$
  - $u \perp B$: u wird in $-u$ gespiegelt: $Pu = -u$ daher Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda = -1$

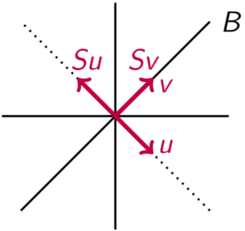
Spiegelungsmatrix in 2D

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

S ist die Spiegelungsmatrix entlang der Geraden $y = x$.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Sv = 1 \cdot v; \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad Su = -1 \cdot u$$

Also sind $\lambda = 1, -1$ Eigenwerte dieser Matrix.



Verständnisfragen zu 5.1

- Gibt es Eigenvektoren ohne Eigenwerte? Gibt es Eigenwerte ohne Eigenvektoren?
- Welche Eigenwerte und Eigenvektoren hat die Nullmatrix?
- Wenn P eine Projektionsmatrix ist, was ist P^2?
- Wenn S eine Spiegelungsmatrix ist, was ist S^2?
- Gegeben ist ein Eigenvektor u zum Eigenwert λ
  - ist u auch Eigenvektor von A^2? Zu welchem Eigenwert?
  - wenn A auch invertierbar ist: ist u auch Eigenvektor von A^{-1}? Wenn ja, zu welchem Eigenwert?