

Einführung in die Mathematik A

carl.herrmann@uni-heidelberg.de
www.hdsu.org

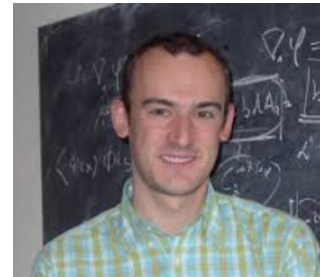
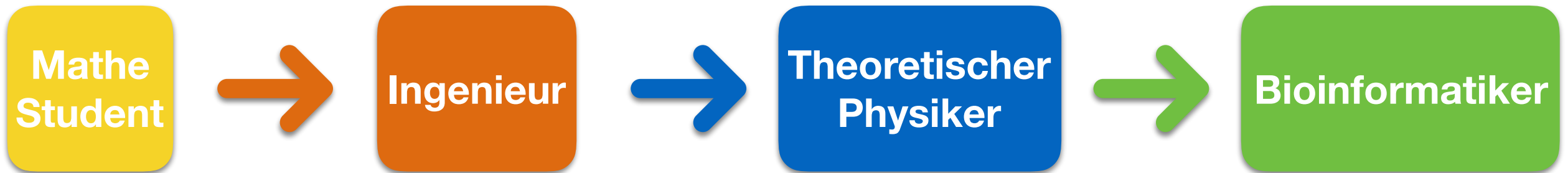


Medizinische Fakultät Heidelberg

Me, myself and I...



Medizinische Fakultät Heidelberg



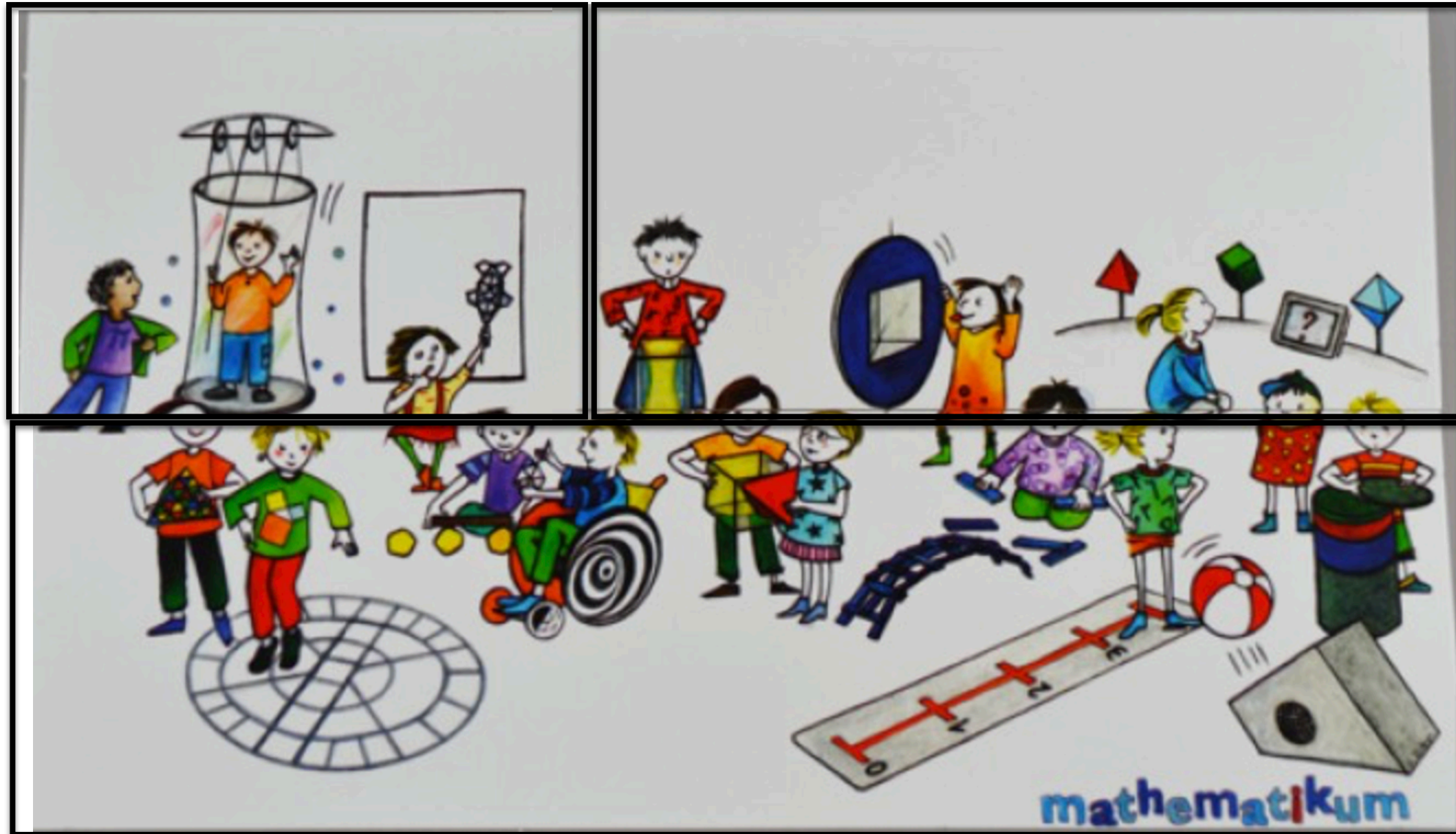
- Dozent am IPMB (2013-2018), seit 2018 an der medizinischen Fakultät
- Gruppenleiter am DKFZ (2013-2018), seit 2018 stell. Leiter der Health Data Science Unit (BioQuant & med. Fakultät)
- Gruppenleiter Biomedical Genomics (www.hdsu.org)

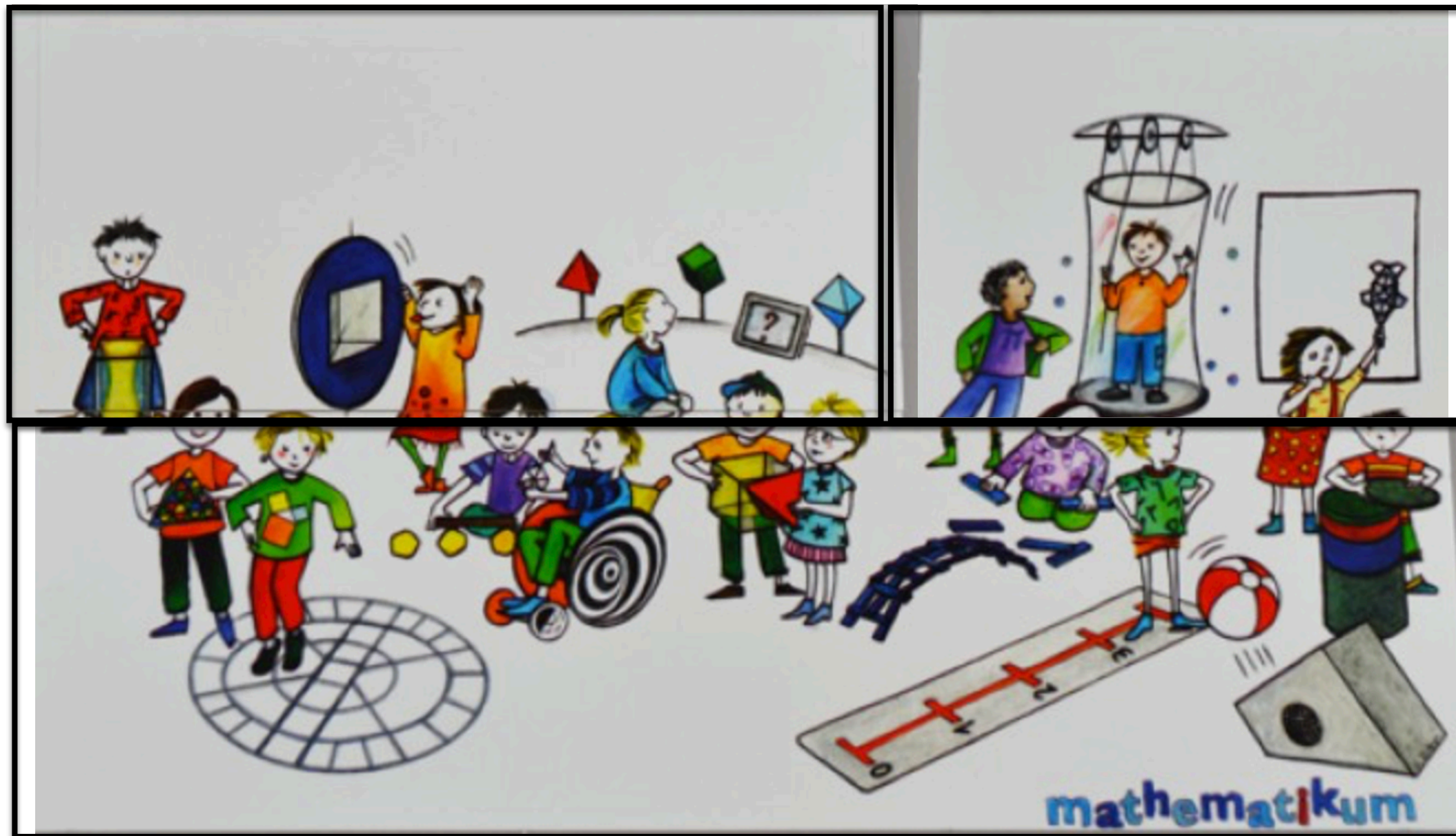


Medizinische Fakultät Heidelberg

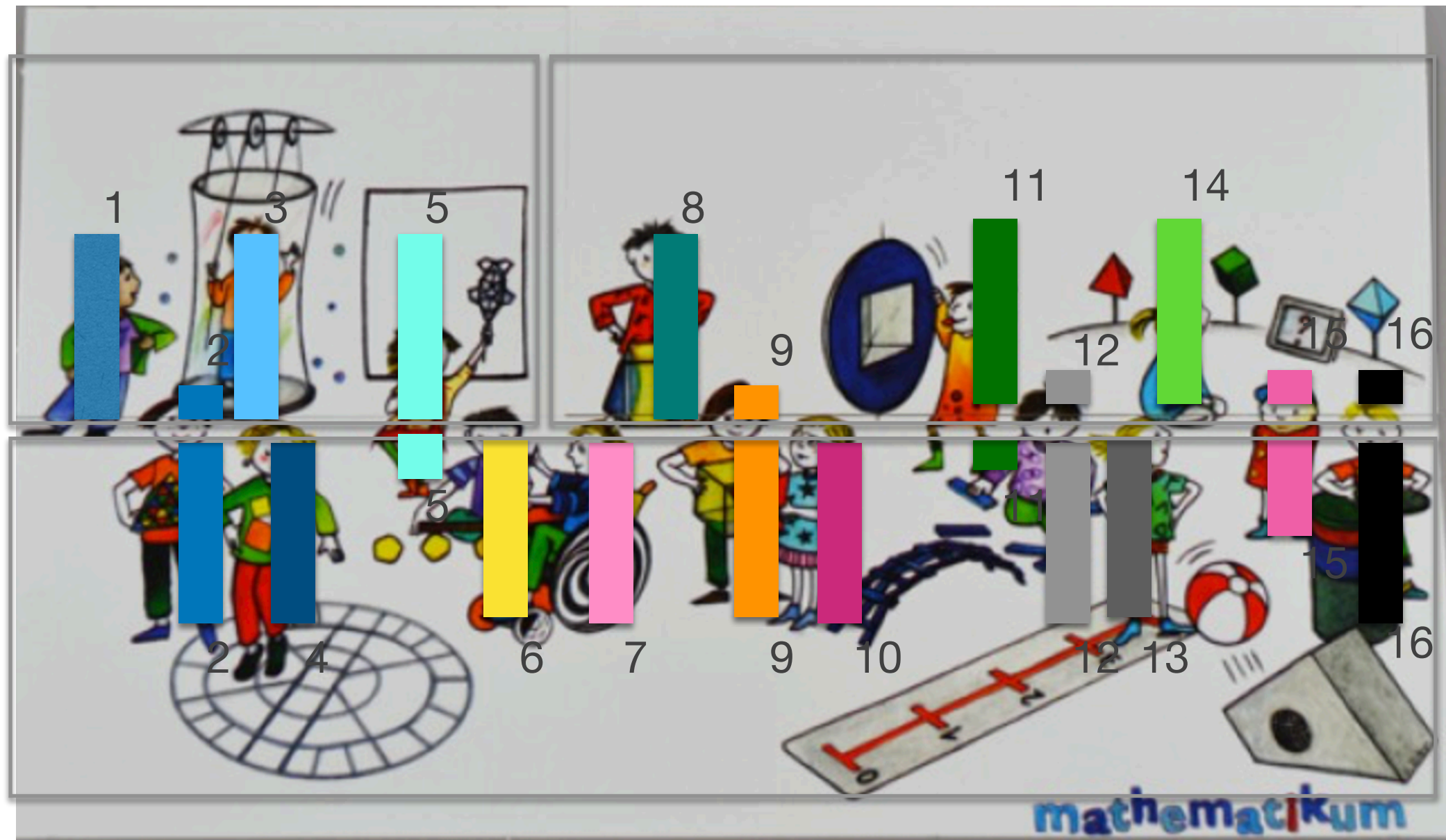
Worum geht es in Mathe ?



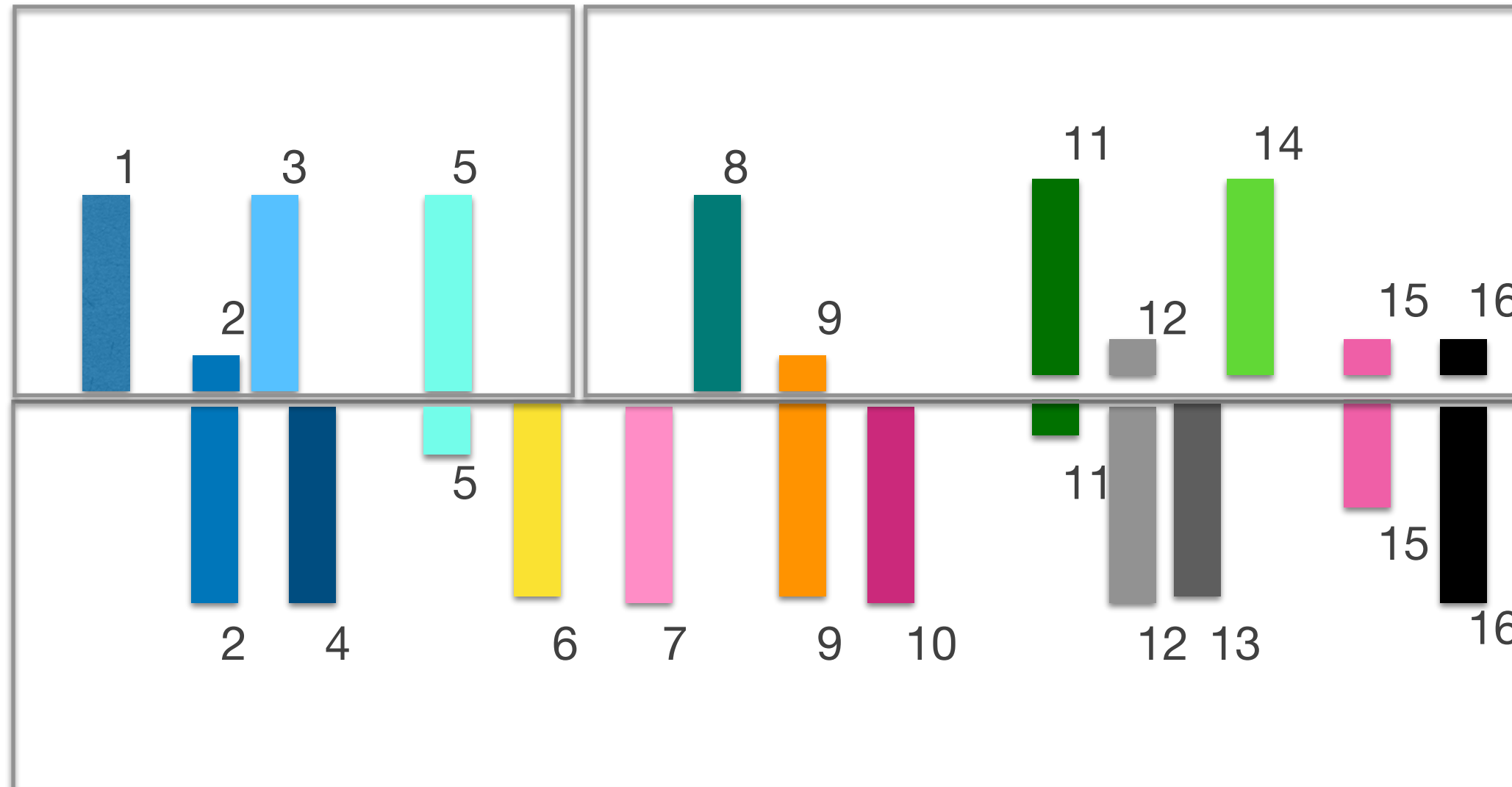






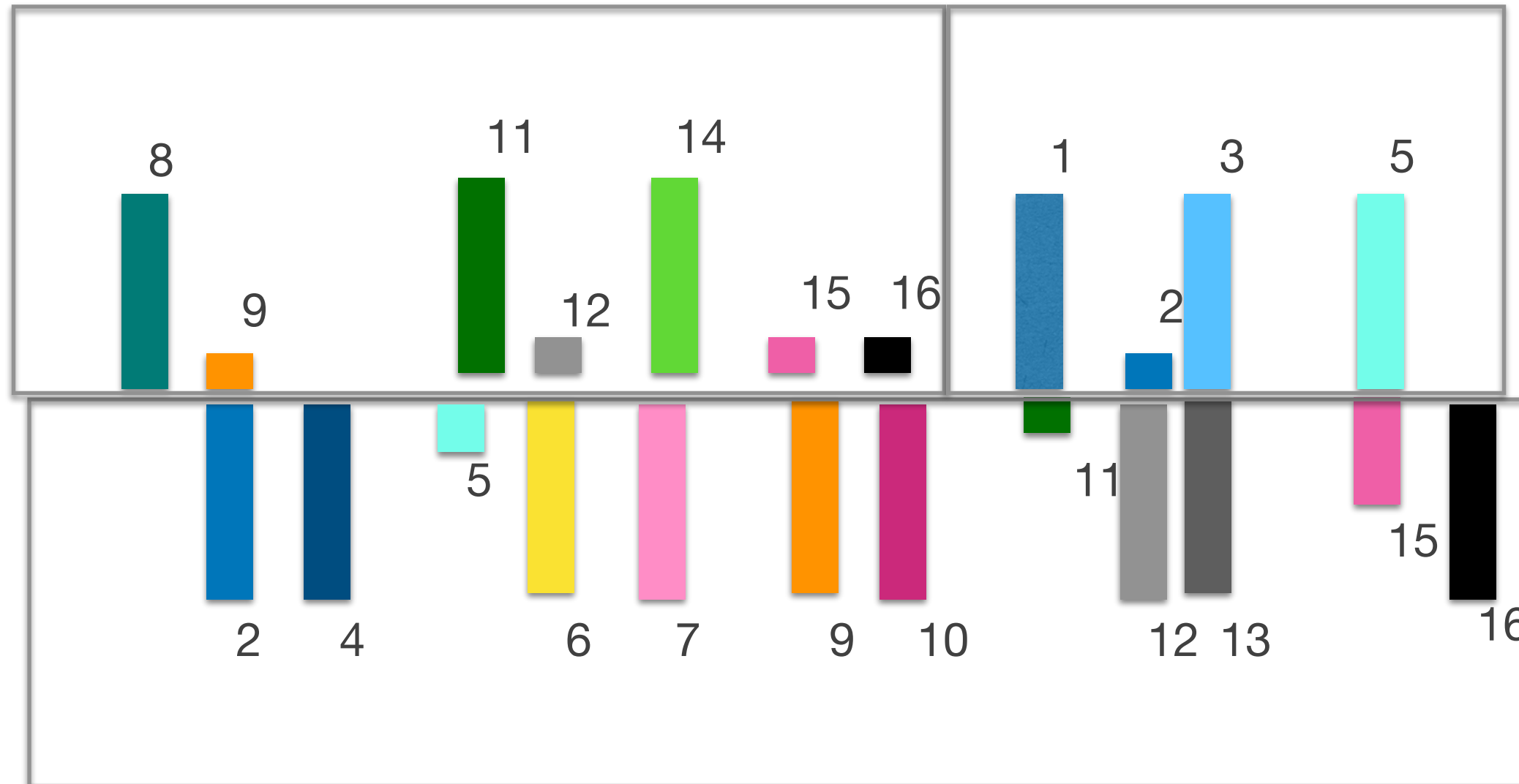


Mathe = Abstrahieren



(1) **(2,2)** (3) (4) **(5,5)** (6) (7) (8) **(9,9)** (10) **(11,11)** **(12,12)** (13) (14) **(15,15)** **(16,16)**

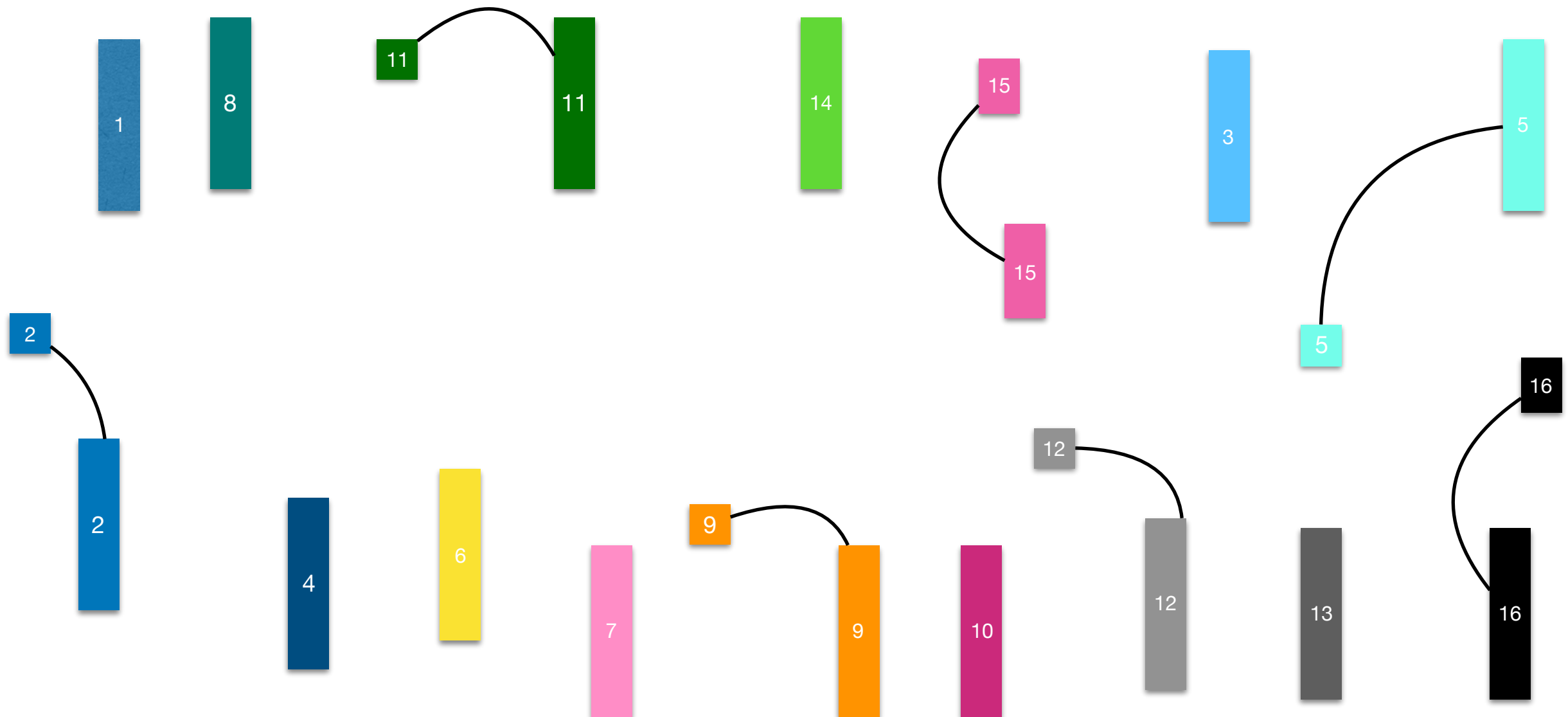
7 Kinder durch 2 Segmente definiert (14 Segmente) + 9 Kinder durch 1 Segment (9 Segmente) = 23 Segmente für 16 Kinder



(1,11) (2,12) (3) (13) (5,15) (16) (8) (9,2) (4) (11,5) (12,6) (14) (7) (15,9) (16,10)

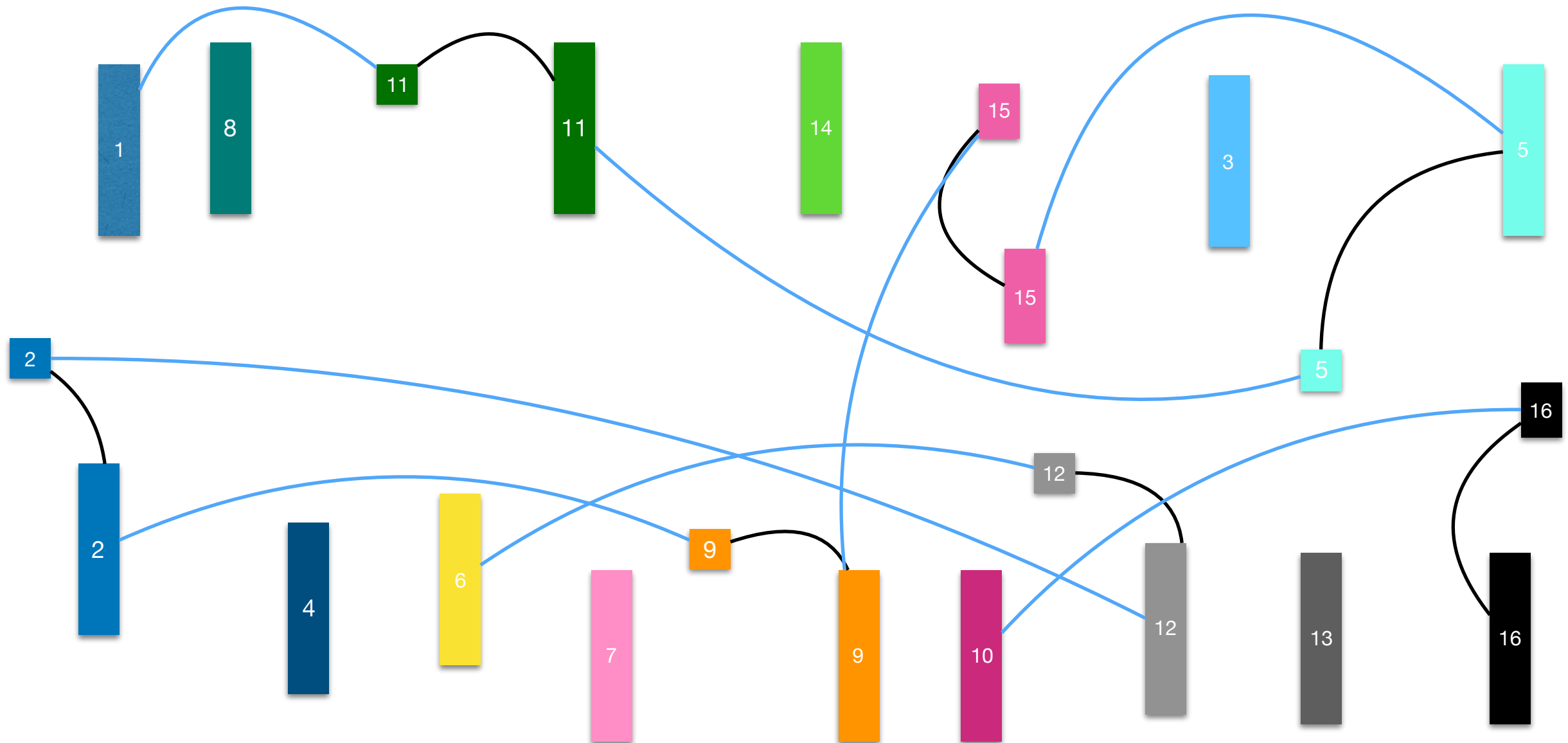
8 Kinder durch 2 Segmente definiert (16 Segmente) + 7 Kinder durch 1 Segmente (7 Segmente) = 23 Segmente für 15 Kinder

Abstrahierung als Graphen



Am Anfang: 16 Gruppen = 16 Kinder

Abstrahierung als Graphen



Am Anfang: 16 Gruppen = 16 Kinder



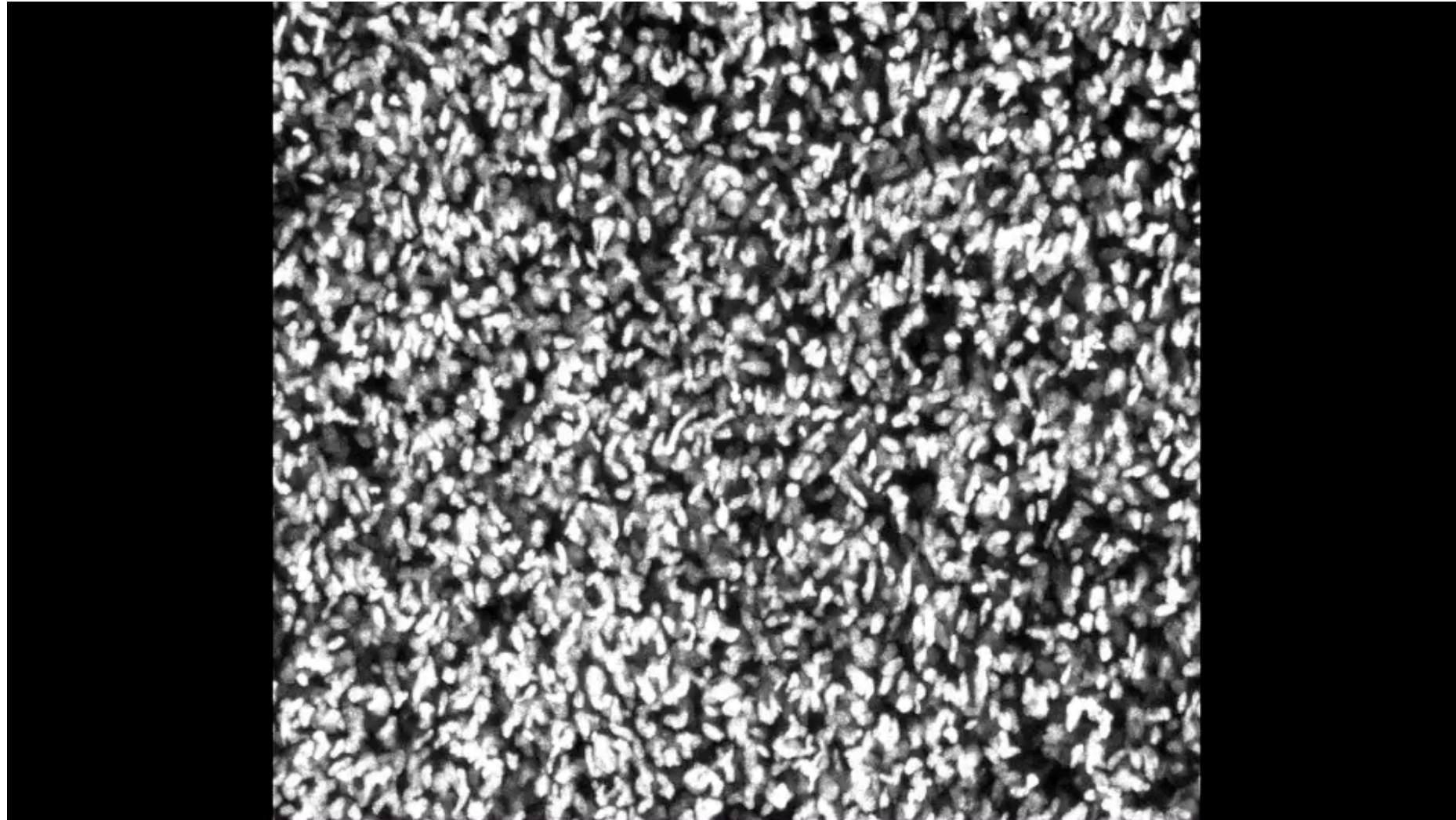
Medizinische Fakultät Heidelberg

Beispiele von mathematischen Anwendungen

Beispiel 1 : Musterbildung



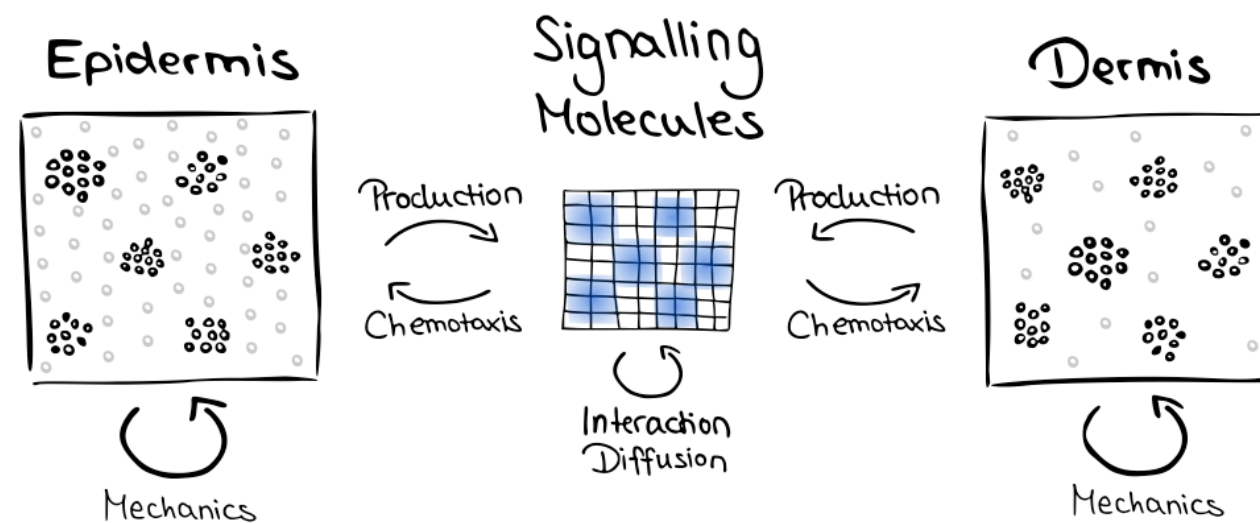
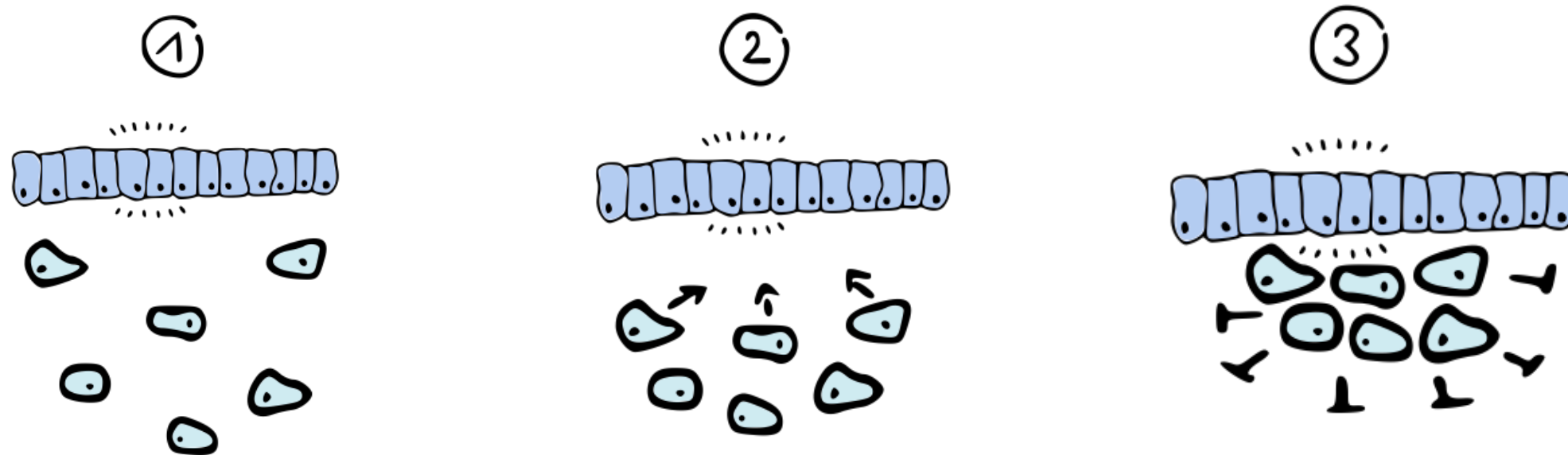
Medizinische Fakultät Heidelberg



[Katharina Becker]

Ein Modell für die hierarchische Musterbildung von Haarfollikeln auf der Haut

- Masterarbeit von Katharina Becker (MoBi)
- Wie entstehen Muster bei der Bildung von Follikeln auf der Haut?



Mathematische Formulierung



Medizinische Fakultät Heidelberg

Konzentration der Signalmoleküle

$$\frac{\partial \text{FGF}}{\partial t} = D_{\text{FGF}} \nabla^2 \text{FGF} + c_{\text{epi}} \cdot f(\text{FGF}, u) \quad \frac{\partial \text{TGF}}{\partial t} = D_{\text{TGF}} \nabla^2 \text{TGF} + c_{\text{der}} \cdot \text{prod}_{\text{TGF}} - \text{TGF} \cdot \text{deg}_{\text{TGF}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u + c_{\text{epi}} \cdot g(\text{FGF}, u)$$

Positionen der einzelnen Zellen

mechanische
Interaktion

Migration in Richtung der
FGF - Quelle

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i + F_i$$

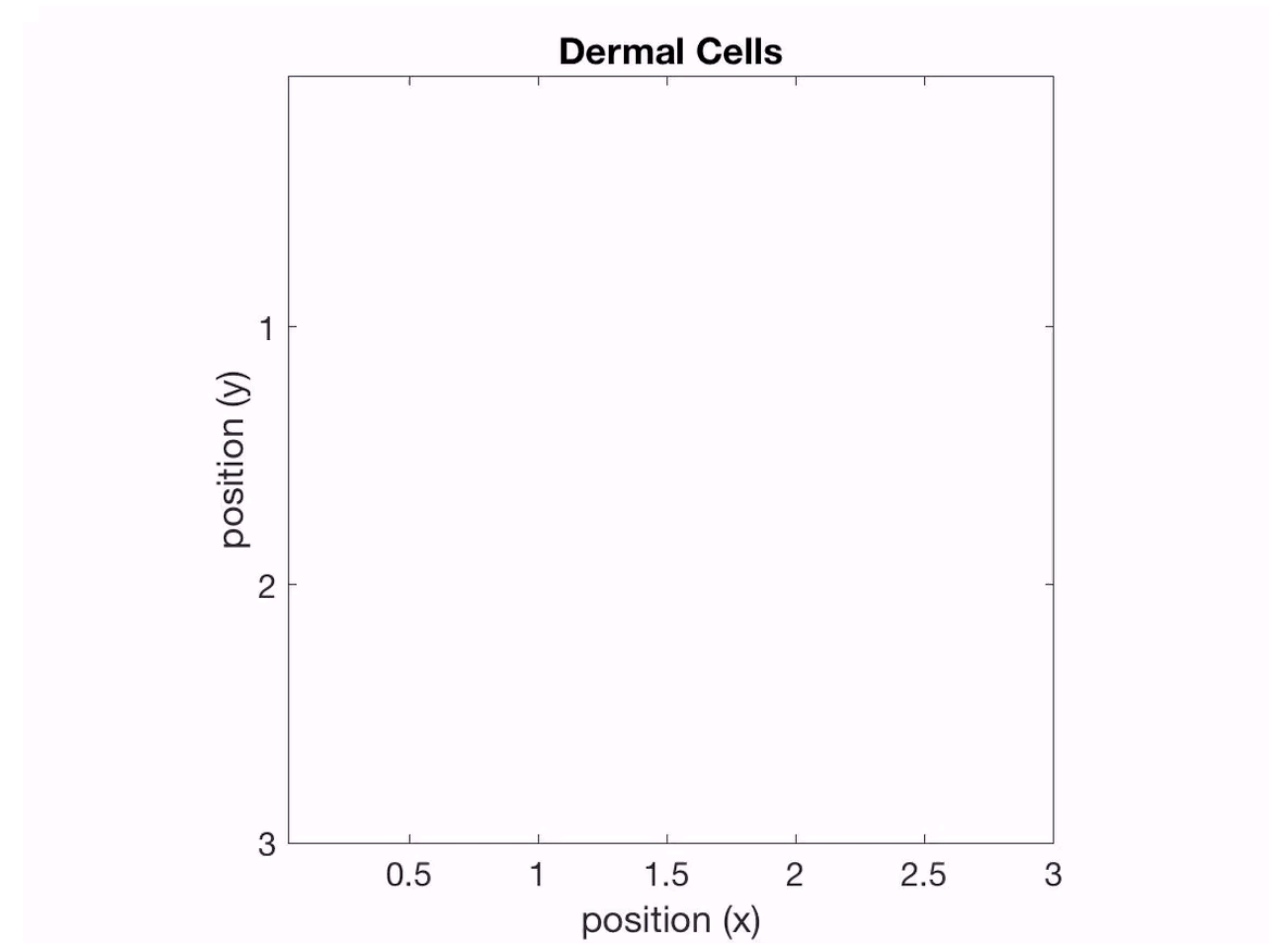
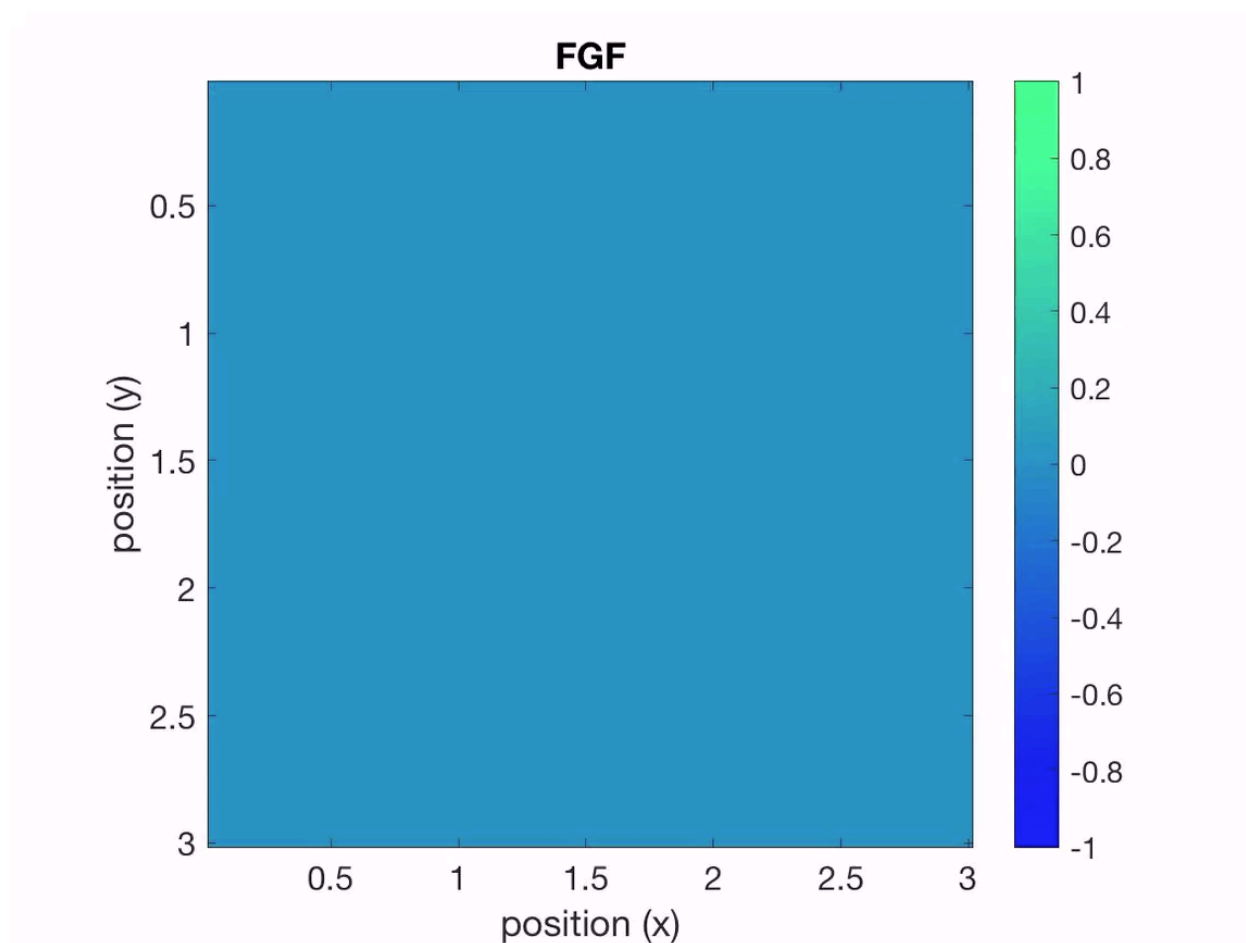
$$dv_i = \left(\frac{1}{\tau_1} (\psi F_i - v_i) + \frac{1}{\tau_2} (\chi \nabla \text{FGF}(x_i) - v_i) \right) dt + d\xi(t)$$

[Katharina Becker]

Simulation

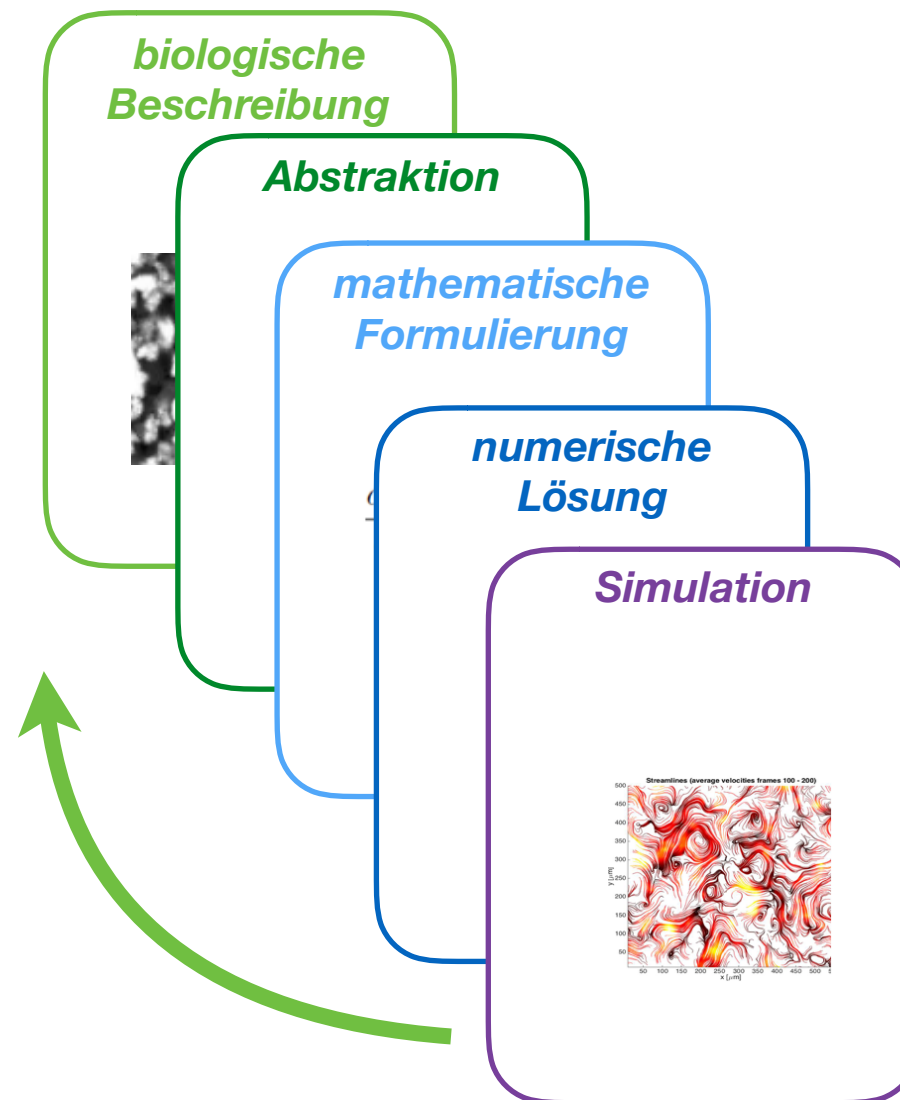


Medizinische Fakultät Heidelberg



[Katharina Becker]

Verfahren



Mathematische Werkzeuge

Systeme von partiellen differentiellen Gleichungen

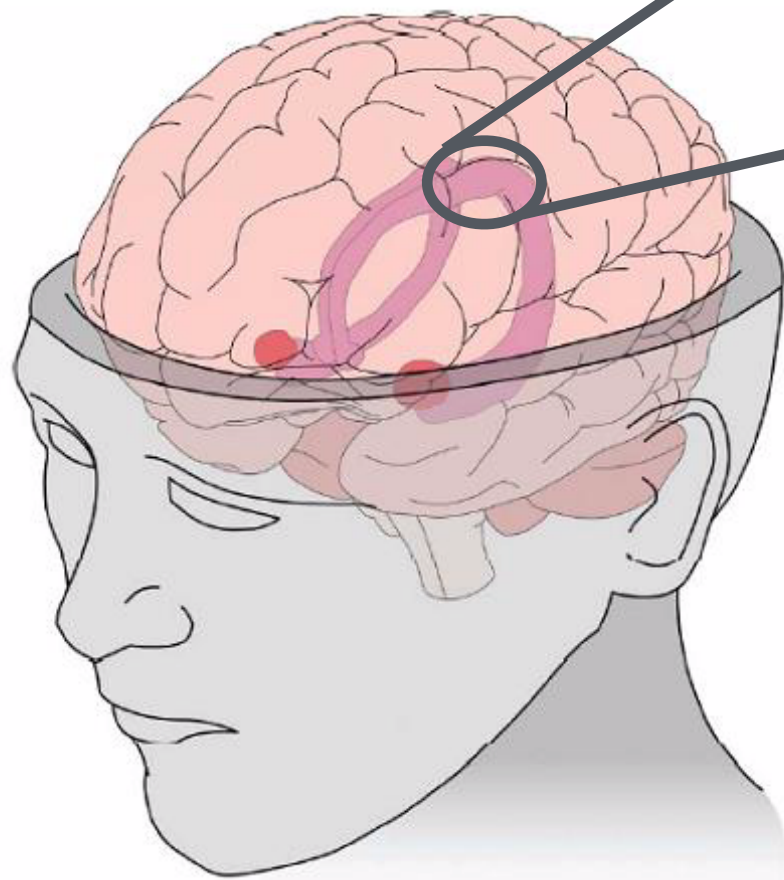
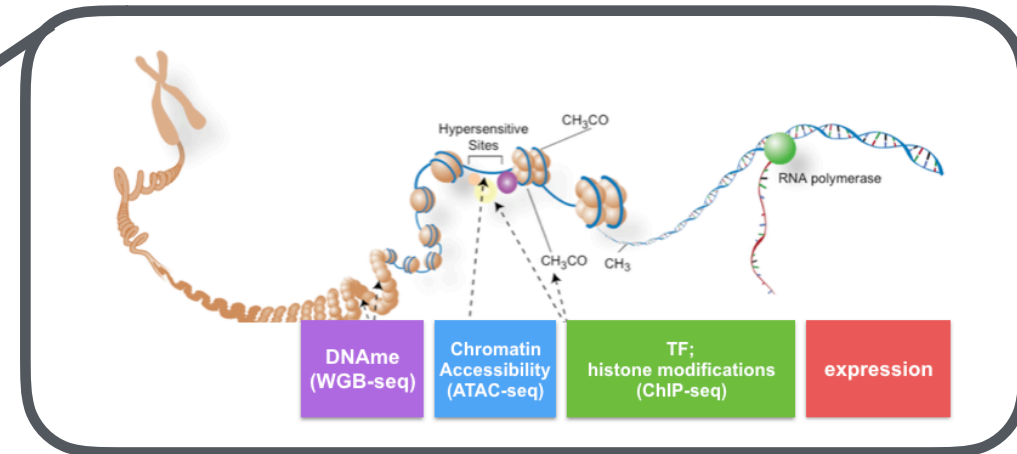
Numerische Lösungen von PDG

→ ***Analysis (Mathe B)***

Beispiel 2 : große Datenmengen darstellen

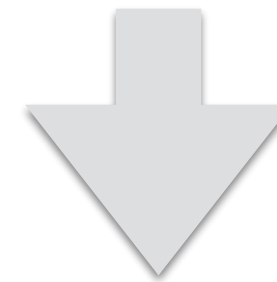


Medizinische Fakultät Heidelberg



epigenetische Veränderungen des Chromatins

- DNA Methylierung
- Veränderungen an Histonproteinen

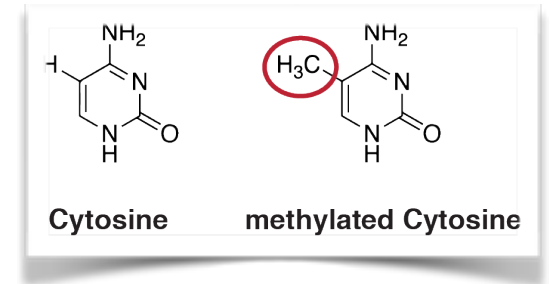
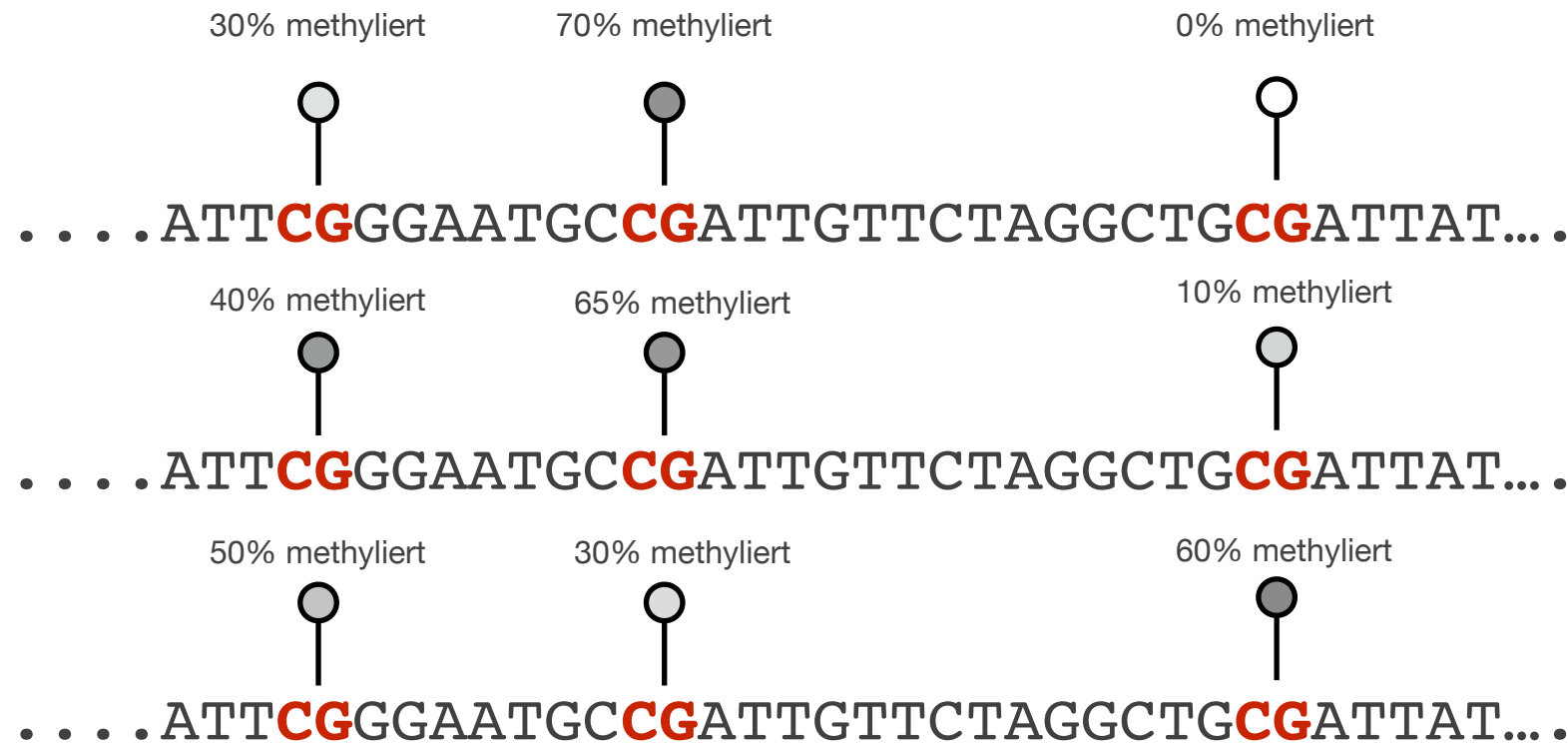


***Verändertes Expressionsmuster der Gene
(Krebs, Neurodegenerative Erkrankungen,
Schizophrenie,...)***

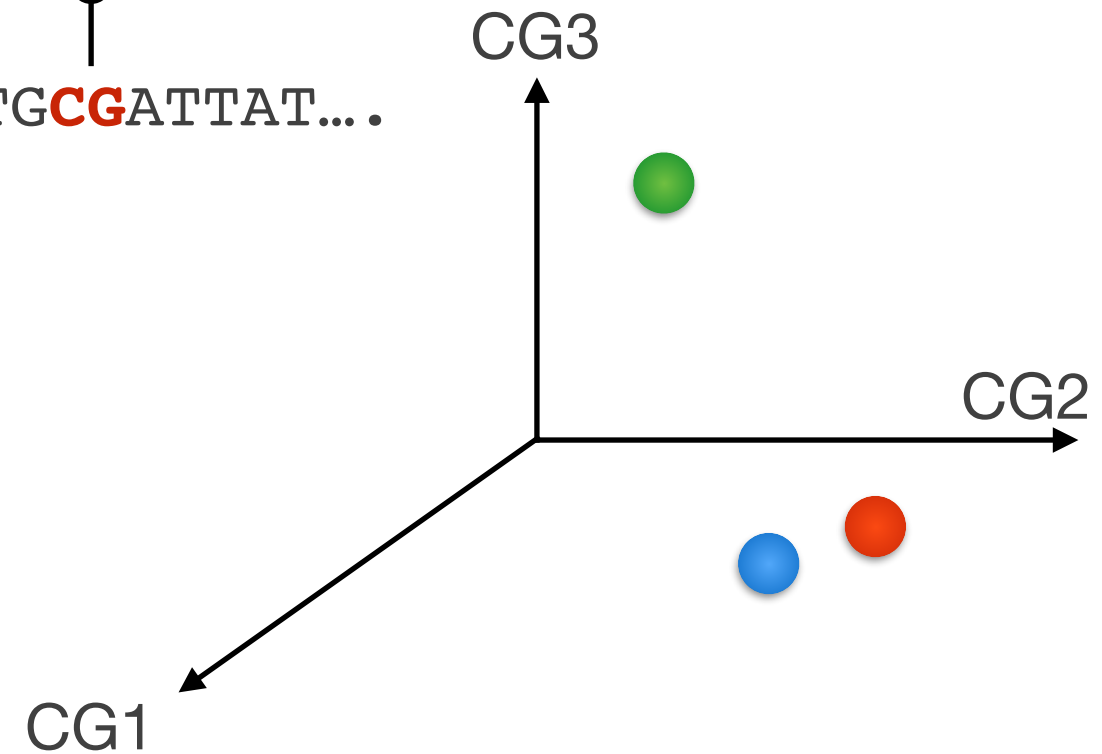
Beispiel 2 : große Datenmengen darstellen



Medizinische Fakultät Heidelberg



	Patient 1
CG1	0.3
CG2	0.7
CG3	0



Große Datenmengen darstellen



Medizinische Fakultät Heidelberg

- Problem: es gibt 28 Millionen CG Positionen im menschlichen Genom...

28 Millionen Koordinaten...

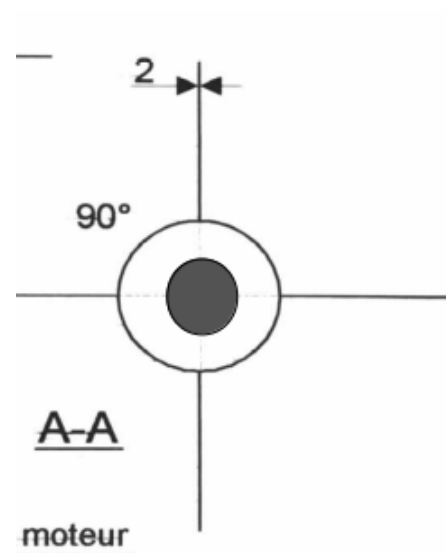
	Patient 1	Patient 2	Patient 3
CG1	0.3	0.4	0.5
CG2	0.7	0.65	0.3
CG3	0	0.1	0.6
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

Frage: wie kann man viele (= 28 Millionen) Koordinaten auf wenige (2 oder 3) reduzieren?

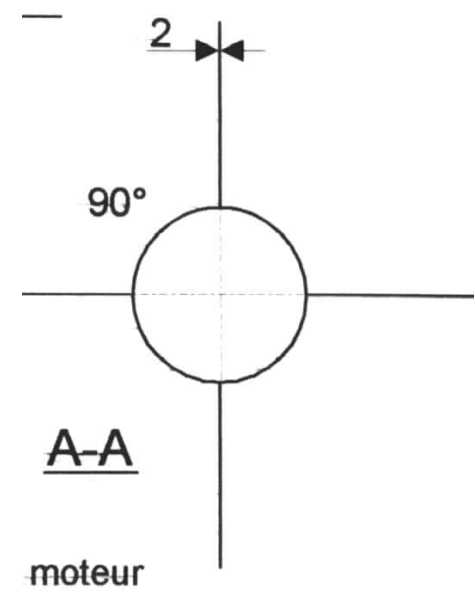
3d → 2d

- Wie malt man am besten eine Rakete?

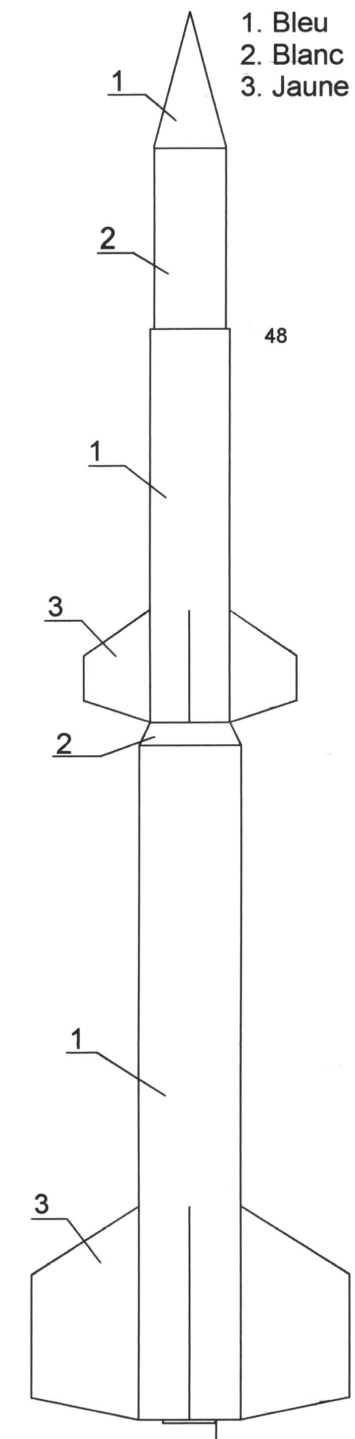
von oben



von unten



von der Seite

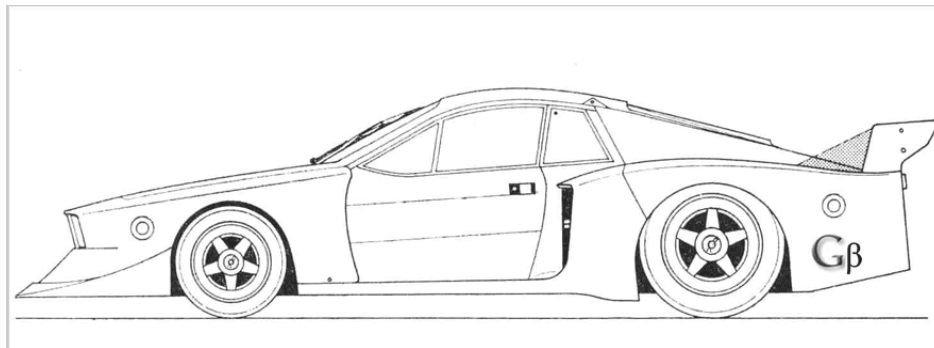


3d → 2d

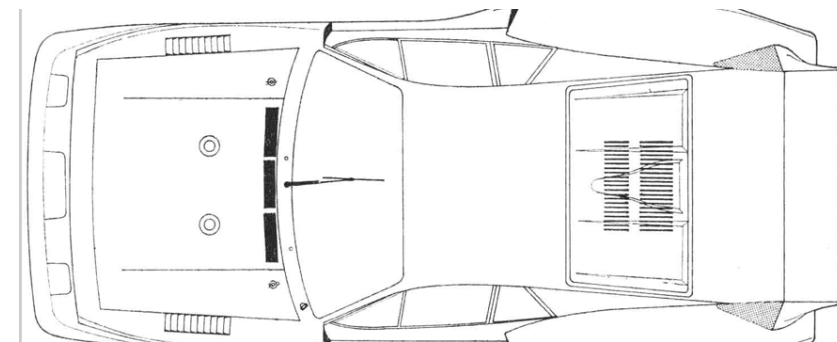


- Wie malt man am besten ein Auto?

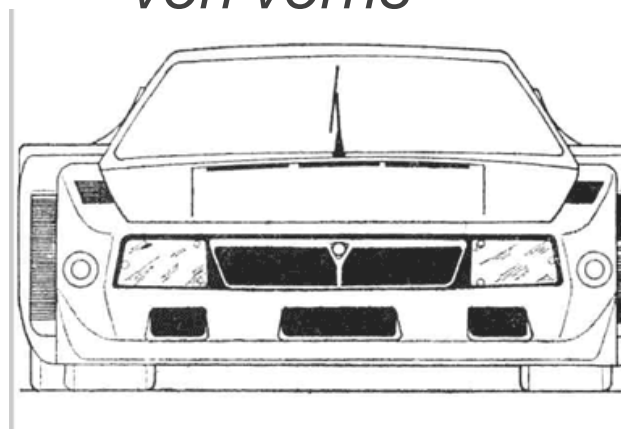
von der Seite



von oben



von vorne

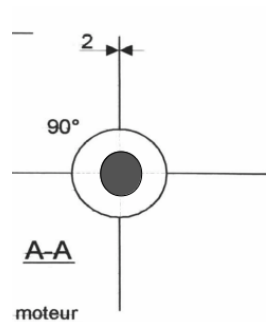


Beste Option?

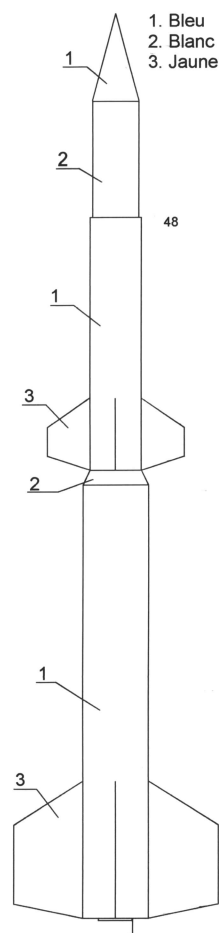


Medizinische Fakultät Heidelberg

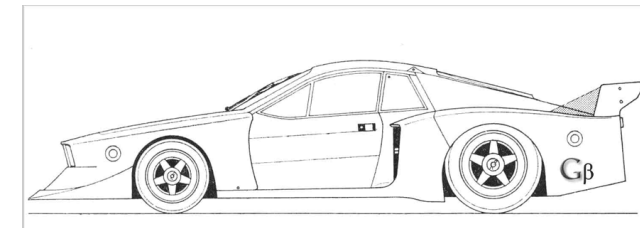
10% Information



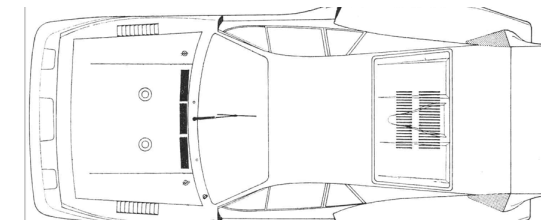
80% Information



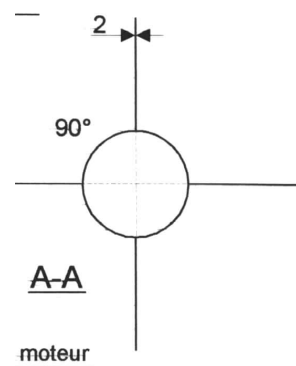
45% Information



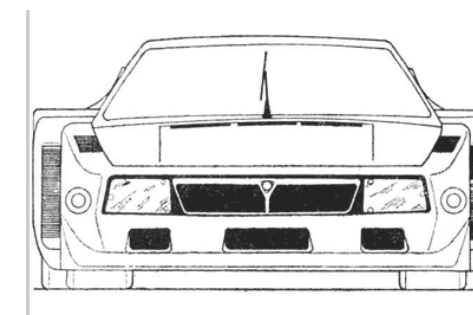
30% Information



10% Information



25% Information

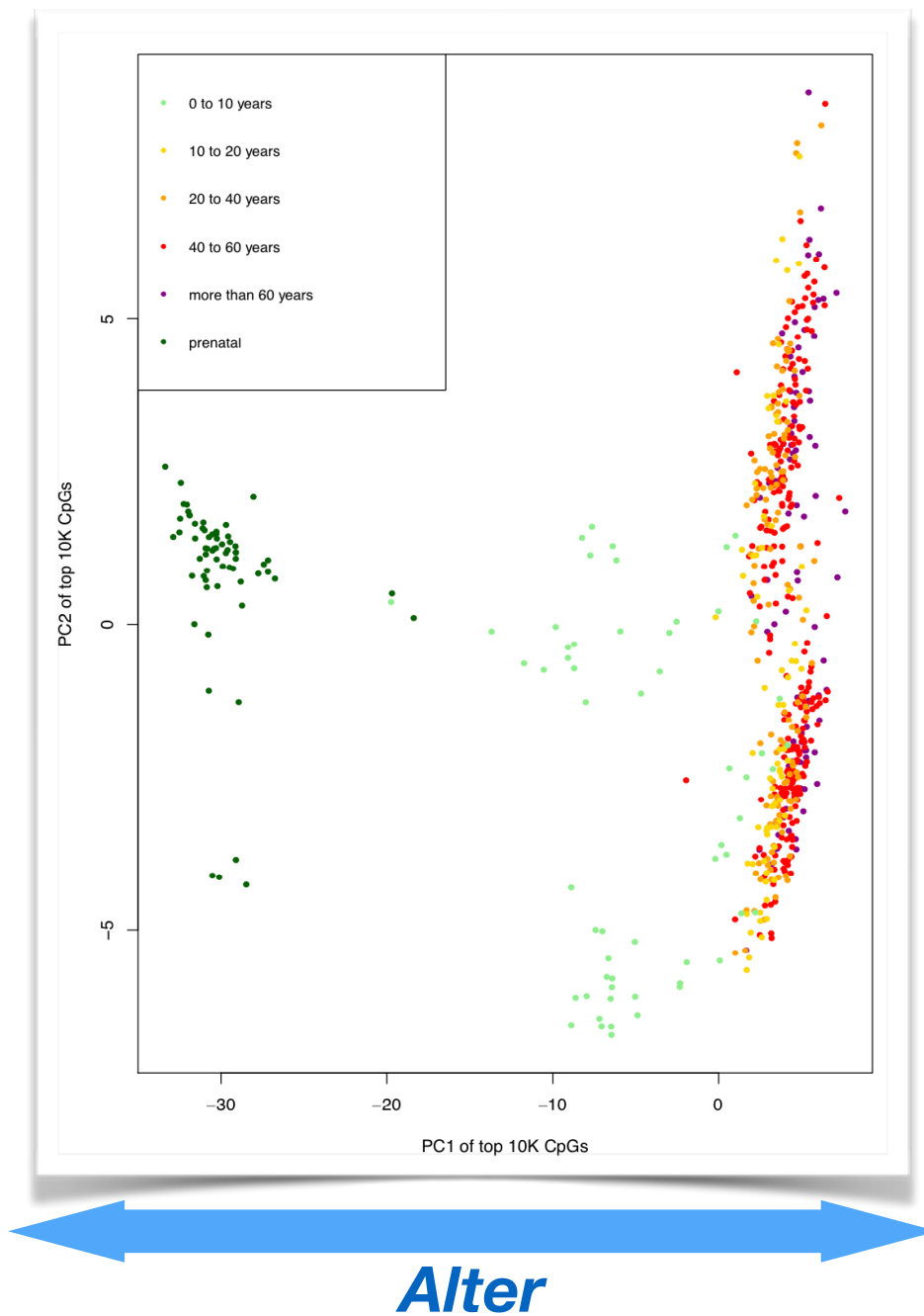


**Prinzip der Hauptkomponenten-Analyse:
finde die Projektion, die am meisten Information erhält!**

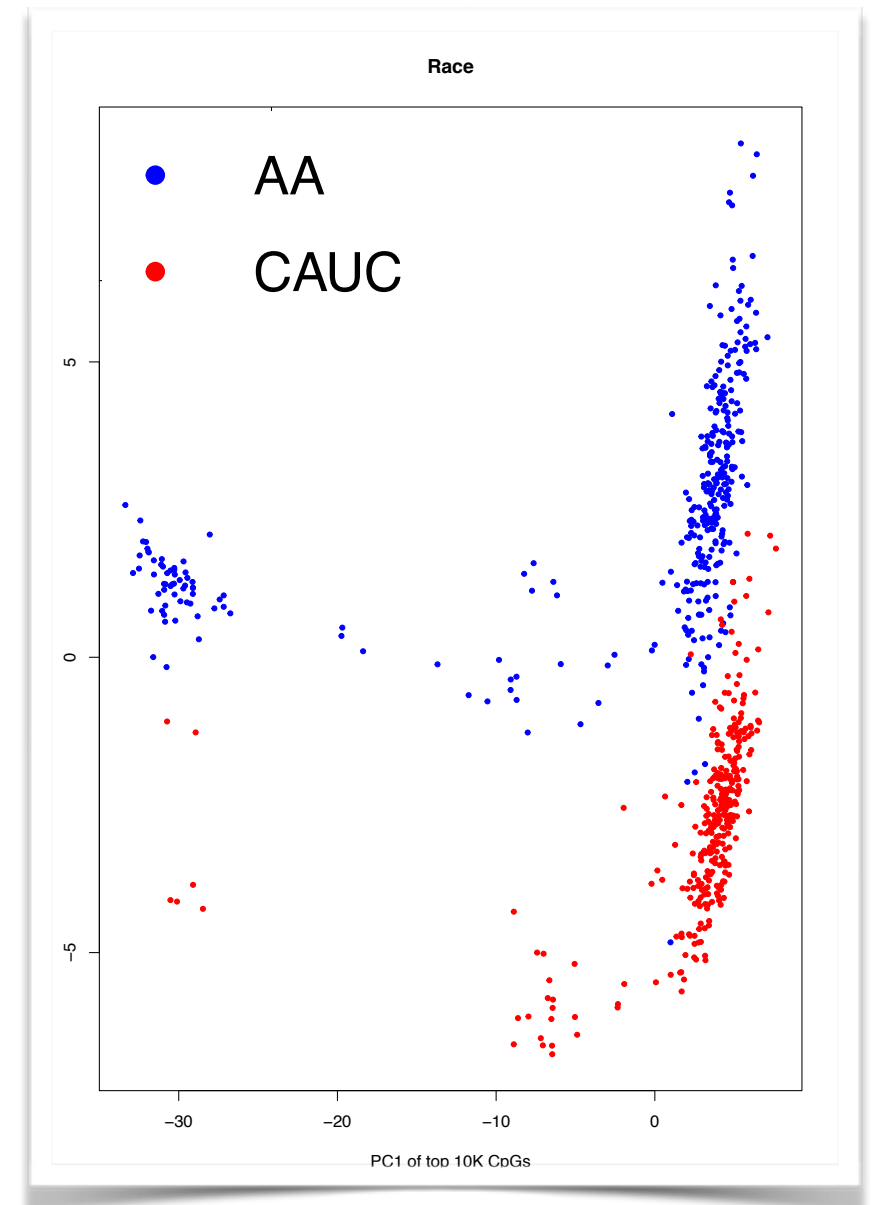
Hauptkomponentendarstellung



Medizinische Fakultät Heidelberg



**Ethnische
Herkunft**

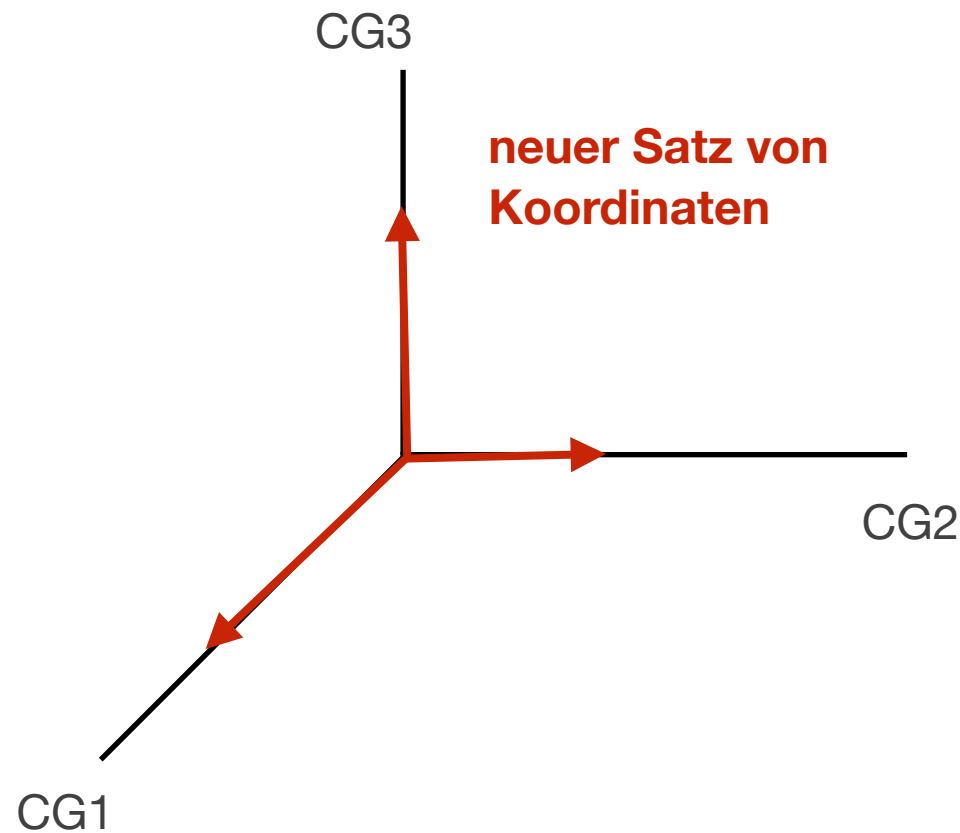


**DNA Methylierung von ~500 Patienten
an Schizophrenie erkrankt**

Optimale Projektion finden



Medizinische Fakultät Heidelberg



- Wir wollen den Datensatz mittels neuer Koordinaten darstellen
- Die Korrelationsstruktur der Daten hängt von dem Koordinatensystem ab
- **Ziel: finde das Koordinatensystem, das die Korrelationsmatrix diagonal macht**

→ ***Matrix-Diagonalisierung***

Verfahren

- Darstellungsproblem als ein mathematisches Problem formulieren
- Geeignetes mathematisches Werkzeug anwenden

Mathematische Werkzeuge

Kovarianzmatrizen; Eigenvektoren / Eigenwerte
Diagonalisierung der Matrizen
→ ***lineare Algebra (Mathe A)***



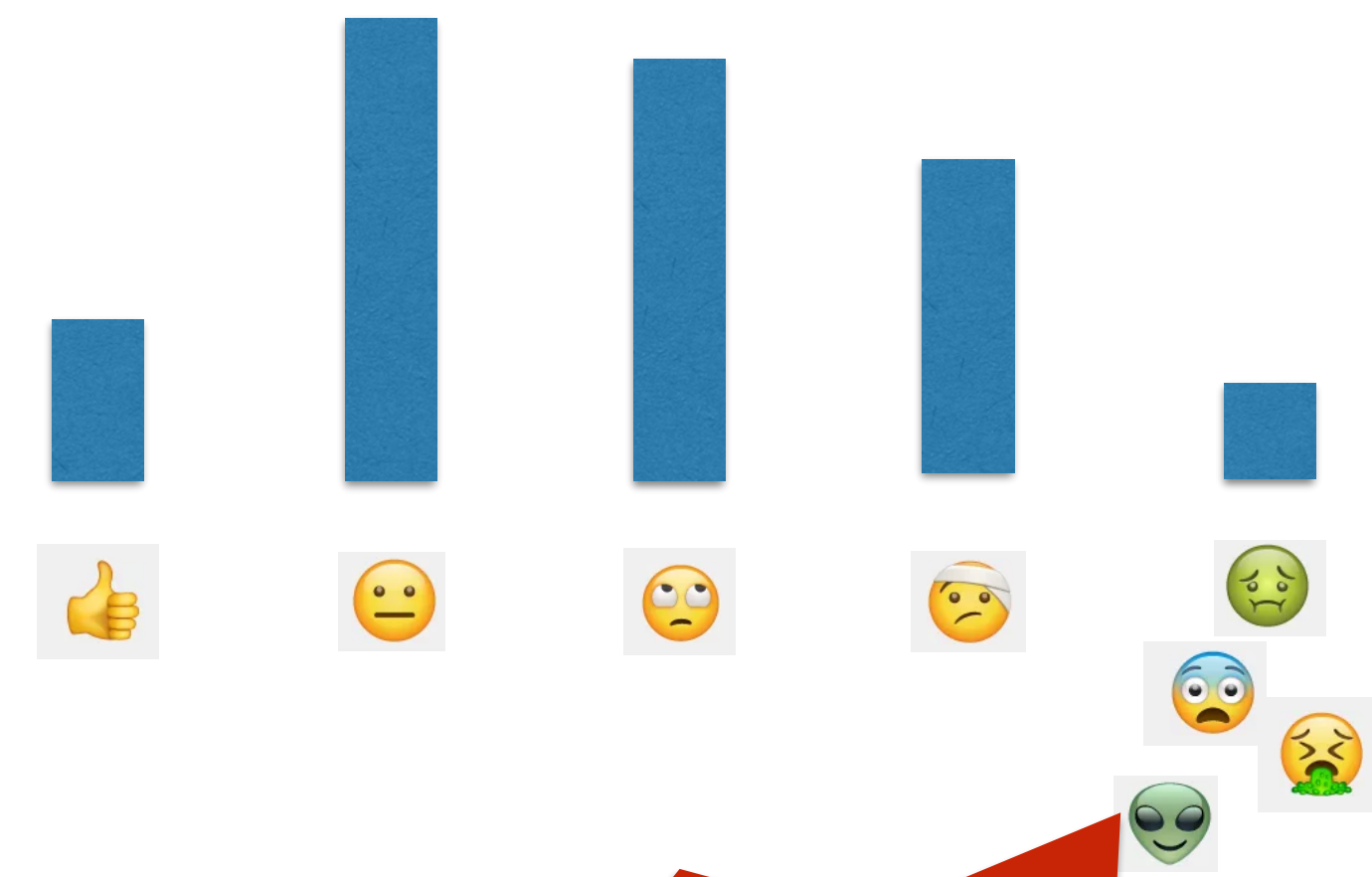
Medizinische Fakultät Heidelberg

Mathe @ MoBi

Typologie der MoBis bzg. Mathe



Medizinische Fakultät Heidelberg



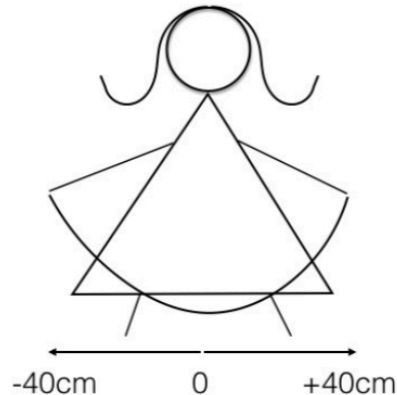
Wir hassen Textaufgaben !!



Beispiel



Aufgabe 2: Schneewitchen springt Seil (13 Punkte)



Die Funktionen \sinh und \cosh werden definiert durch:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

1. Zeigen Sie, dass $(\cosh(x))' = \sinh(x)$ und $(\sinh(x))' = \cosh(x)$
2. Zeigen Sie, dass $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Schneewitchen möchte bevor die Zwerge nach Hause kommen zur Entspannung Seil springen. Sie hält das Stück Seil in ihren Händen mit 80cm Abstand voneinander; die Form des hängenden Seils wird gegeben durch die Gleichung:

$$y(x) = 40 \cosh\left(\frac{x}{40}\right)$$

wobei $x \in [-40\text{cm}, +40\text{cm}]$ die horizontale Dimension, und y die vertikale Dimension ist.

Aufgabe 3: Dornröschen berechnet Volumen (10 Punkte)

Nachdem sie sich gestochen hat möchte Dornröschen noch schnell das Volumen ihrer Spindel berechnen bevor sie in den hundertjährigen Schlaf fällt. Dann schläft sie nämlich besser. Die Spindel ist ein Rotationskörper (um die Rotationsaxe x), deren Profil gegeben ist durch die Gleichung

$$y(x) = 3 - \sqrt{4 - x^2} \quad x \in [-1, 1]$$

Mathe in der Wissenschaft?

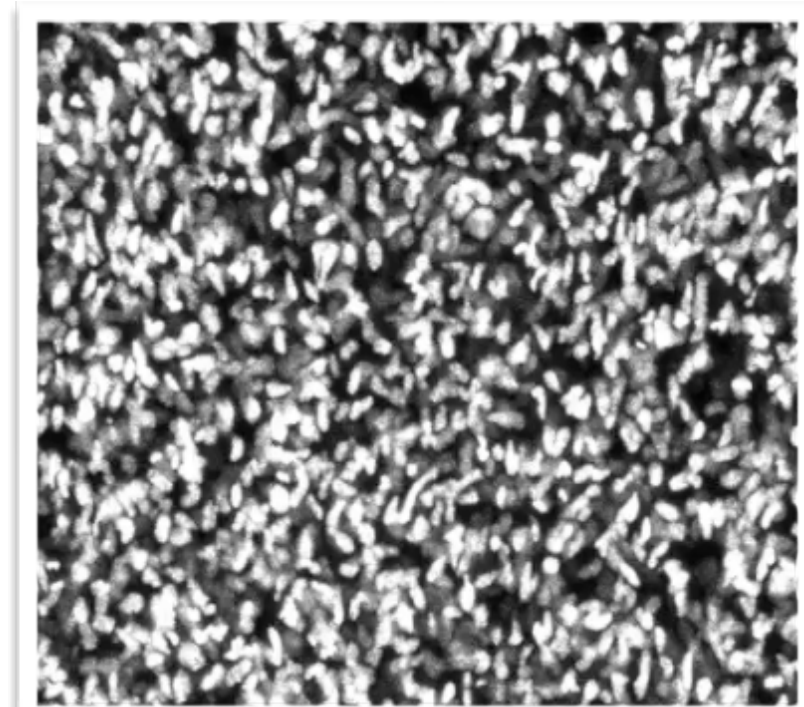


Medizinische Fakultät Heidelberg

Differenzieren Sie
folgende Funktionen

(1) $f(x) = a \ln x - be^x - 3x^2$ (2) $f(x) = \sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$
(3) $f(x) = \cos x + \sin(3x)$ (4) $f(x) = 2 \cos^2(3x)$

Wie kann die Entstehung von Follikeln
beschrieben/modelliert werden?



→ **Text**aufgabe

Anspruch dieser Veranstaltung



Medizinische Fakultät Heidelberg



Mathe A WS 2019/2020



Medizinische Fakultät Heidelberg

- Neu in diesem Semester: Mathe Vorlesung nach dem Prinzip des **“Inverted classrooms”** (cf. Christian Spannagel, PH Heidelberg)
https://de.wikipedia.org/wiki/Umgedrehter_Unterricht
- **Teil 1: Online Vorlesungen**
 - Vorlesungen finden nicht im Hörsaal statt!
 - Online Video Vorlesungen werden bereitgestellt (Folien werden besprochen und annotiert)
 - Folien sind als pdf verfügbar; Verständnisfragen
- **Teil 2: “aktives Plenum”**
 - neue Aufgaben werden gemeinsam besprochen
 - Fragen aus dem Fragenkatalog werden diskutiert/beantwortet
- **Teil 3: Tutorium**
 - Übungsblätter werden online gestellt, in Gruppen gelöst und abgegeben
 - Aufgaben werden im Tutorium korrigiert und besprochen

Ablauf



← Woche n →

	Mittwoch	Donnerstag	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Montag	Dienstag
online	Videos VL Woche n freigeschaltet				Videos VL Woche n+1 freigeschaltet			
Plenum	Plenum Besprechung VL Woche n-1			Fragen zur VL Woche n (online Google Docs)	Plenum Besprechung VL Woche n			Fragen zur VL Woche n+1
Tutorium		Tutorium: Besprechung ÜB Woche n-2	Abgabe ÜB Woche n-1 (EG BioQuant, bis 14 Uhr!)		Übungsblatt Woche n hochgeladen	Tutorium: Besprechung ÜB Woche n-1	Abgabe ÜB Woche n (EG BioQuant, bis 14 Uhr!)	

← 7 Tage zur Bearbeitung der Video VL →

← 5 Tage zur Bearbeitung des ÜB →

7 Tage zur Bearbeitung
der Video VL

5 Tage zur Bearbeitung
des ÜB

Inhalte Mathe A



Medizinische Fakultät Heidelberg

- mathematische Logik
- Mengenlehre (Mengen / Gruppen / Ringe / Körper)
- komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen
- Lineare Gleichungssysteme
 - Lösen von $AX=b$ Gleichungssystemen
 - Matrixrechnung
 - Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierung
- Grenzwerte und Stetigkeit einer Funktion
- Ableitungen
- Reihenentwicklung

Algebra

Analysis

Bewertung

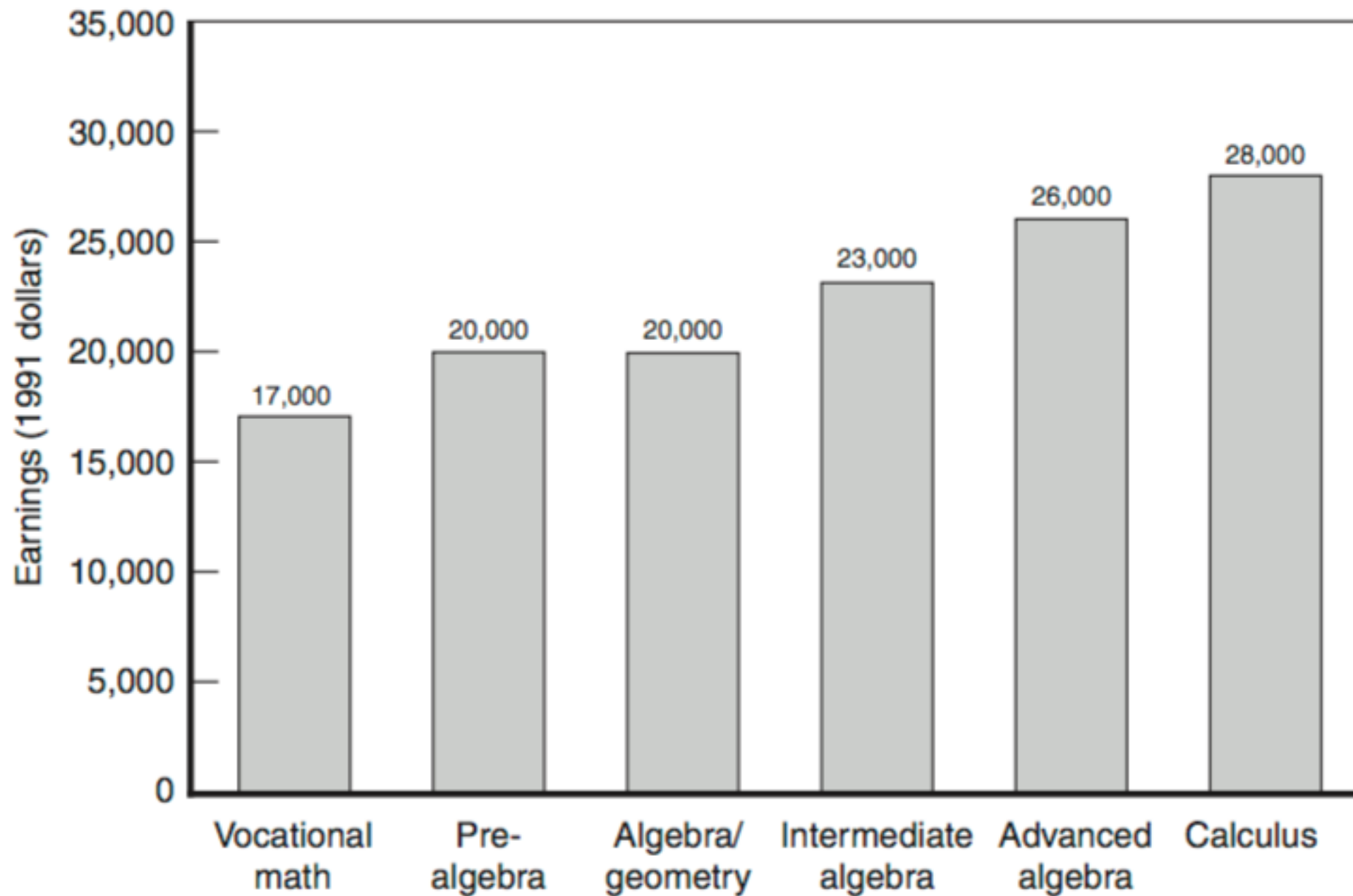


Medizinische Fakultät Heidelberg

- Übungsblätter werden von den Tutoren korrigiert (0-100%)
→ mindestens 50% über alle ÜB für **Klausurzulassung**
- **2 Teilklausuren** (2 x 90 Minuten)
 - 2.12.2019 14h-16h (50%)
 - 11.02.2020 14h-16h (50%)
- **Nachklausur** am Anfang des Sommersemesters 2020



Math matters ...



[Rose, Betts (2001)]

Macht Mathe reich ???



Medizinische Fakultät Heidelberg



ABOUT

PROGRAMS

MILLENNIUM PROBLEMS

PEOPLE

PUBLICATIONS

Rules for the Millennium Prizes

The Clay Mathematics Institute (CMI) has named seven "Millennium Prize Problems." The Scientific Advisory Board of CMI (SAB) selected these problems, focusing on important classic questions that have resisted solution over the years. The Board of Directors of CMI designated a \$7 million prize fund for the solutions to these problems, with \$1 million allocated to each. The Directors of CMI, and no other persons or body, have the authority to authorize payment from this fund or to modify or interpret these stipulations. The Board of Directors of CMI makes all mathematical decisions for CMI, upon the recommendation of its SAB.

The SAB of CMI will consider a proposed solution to a Millennium Prize Problem if it is a complete mathematical solution to one of the problems. (In the case that someone discovers a mathematical counterexample, rather than a proof, the question will be considered separately as described below.) **A proposed solution to one of the Millennium Prize Problems may not be submitted directly to CMI for consideration.**

Millennium Problems

Yang–Mills and Mass Gap

Experiment and computer simulations suggest the existence of a "mass gap" in the solution to the quantum versions of the Yang-Mills equations. But no proof of this property is known.

Riemann Hypothesis

The prime number theorem determines the average distribution of the primes. The Riemann hypothesis tells us about the deviation from the average. Formulated in Riemann's 1859 paper, it asserts that all the 'non-obvious' zeros of the zeta function are complex numbers with real part $1/2$.

P vs NP Problem

If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given N cities to visit, how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily find a solution.

Navier–Stokes Equation

This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.