6.2 Allgemeine Konzepte zu reellen Funktionen

Reelle Funktionen einer Veränderlichen

- **reelle Folgen**: Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$n \in \mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{R}$$

- **reelle Funktionen:** Abbildungen $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}$

$$x \in \mathcal{D} \to f(x) \in \mathcal{W}$$

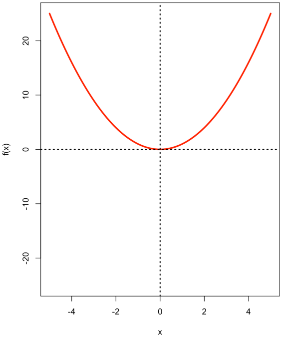
- Definitionen:
  - $\mathcal{D}$ ist die **Definitionsmenge**
  - $\mathcal{W}$ ist die **Zielmenge** (nicht eindeutig definiert!)
  - $f(\mathcal{D})$ ist die **Bildmenge**
  - f ist die **Abbildungsvorschrift**
- Im nächsten Semester werden wir Funktionen **mehrerer Veränderlicher** untersuchen, bei denen $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}$

Reelle Funktionen einer Veränderlichen

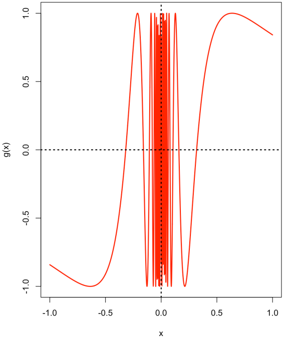
$$x \to f(x) = x^2$$

$$x \to g(x) = \sin \frac{1}{x}$$

- Definitionsmenge: $\mathbb{R}$
- Zielmenge: $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^+$
- Bildmenge: $\mathbb{R}^+$



- Definitionsmenge: $\mathbb{R}^*$
- Zielmenge: $\mathbb{R}$ oder $[-1, 1]$
- Bildmenge: $[-1, 1]$

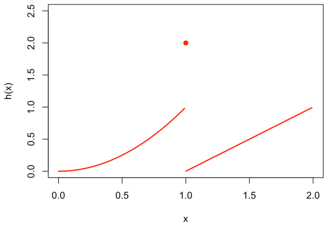


Abbildungsvorschrift

Funktionen können auf verschiedene **explizite** Weisen definiert werden:

- einzelne Gleichung: $f(x) = x^2$
- abschnittsweise:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ x - 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



Funktionen können auch **implizit** definiert werden, d.h. als die Menge der Punkte $(x, y = f(x))$, die eine bestimmte Bedingung erfüllen:

$$x^2 + f(x)^2 = 1 \;\text{ mit } f(x) \geq 0$$

Elementare Eigenschaften einer Funktion

Definitionen zur **Beschränktheit**:

- eine Funktion f ist **beschränkt**, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt: $\forall x \in \mathcal{D} : |f(x)| \leq C$
- gibt es ein solches C *nicht*, ist die Funktion **unbeschränkt**
- eine Funktion f ist nach **oben beschränkt**, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt: $\forall x \in \mathcal{D} : f(x) \leq C$ (wenn nicht, **unbeschränkt nach oben**)
- eine Funktion f ist nach **unten beschränkt**, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt: $\forall x \in \mathcal{D} : f(x) \geq C$ (wenn nicht, **unbeschränkt nach unten**)

Elementare Eigenschaften einer Funktion

Beispiele zur Beschränktheit: Funktion $f(x) = x^2$:

- wenn $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
  - Funktion **unbeschränkt**;
  - **beschränkt nach unten** ($C = 0$);
  - **unbeschränkt nach oben**.
- wenn $\mathcal{D} = [-1, 1]$
  - Funktion **beschränkt** (z.B. $C = 1$)
- Eigenschaft:

  Beschränktheit $\iff$ **Beschr. nach oben** $\wedge$ **Beschr. nach unten**

Elementare Eigenschaften einer Funktion

Definitionen zur **Monotonie**:

- eine Funktion heißt **monoton wachsend** wenn gilt:
  $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- eine Funktion heißt **monoton fallend** wenn gilt:
  $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- sind die Ungleichheiten strikt (also $<$ bzw. $>$) spricht man von **strenger** Monotonie.

Monotone Funktionen sind **injektiv**; der Umkehrschluß gilt aber **nicht!** (also nicht alle injektiven Funktionen sind monoton!)

Kombinationen von Funktionen

- Mehrere Funktionen können unter bestimmten Bedingungen zu einer neuen Funktion kombiniert (oder verkettet) werden:

$$x \longrightarrow y = f(x) \longrightarrow z = g(y) = g(f(x))$$

- Die neue Abbildungsvorschrift $x \to z$ definiert eine neue Funktion $h \equiv g \circ f$; f ist die **innere Funktion**, g die **äußere Funktion**
- Dabei ist zu beachten, dass die **Bildmenge** von f eine Teilmenge der Definitionsmenge von g ist!

Kombinationen von Funktionen

Beispiel:

- $f(x) = x^2$ mit $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ und $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}^+$
- $g(x) = \frac{1}{1-x}$ mit $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Problem: $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}^+ \not\subseteq \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Lösung: man kann die Definitionsmenge $\mathcal{D}_f$ einschränken

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- $f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
- daher gilt jetzt: $f(\mathcal{D}_f) \subseteq \mathcal{D}_g$

Neue Funktion $h = g \circ f$: $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$

- Definitionsmenge $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- Bildmenge $h(\mathcal{D}_h) = \mathbb{R}$.

Umkehrfunktion

- Gegeben sei eine Funktion $f : \mathcal{D}_f \to \mathcal{W}_f$; wenn es eine Funktion g definiert auf $\mathcal{D}_g = f(\mathcal{D}_f)$ gibt, die folgende Bedingungen erfüllt:

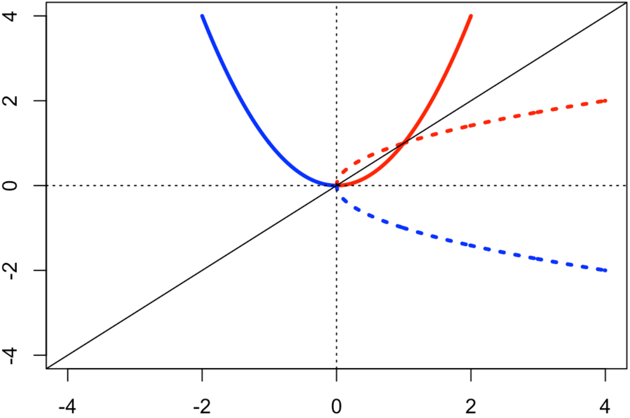
$$\forall x \in \mathcal{D}_f : g(f(x)) = x \quad \text{und} \quad \forall y \in \mathcal{D}_g : f(g(y)) = y$$

  dann ist g die **Umkehrfunktion** der Funktion f (Notation: f^{-1})
- **Eigenschaft:**
  f besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} \iff f$ ist **injektiv** (also ist $f : \mathcal{D}_f \to f(\mathcal{D}_f)$ bijektiv!)

Umkehrfunktion

- Falls die Funktion f auf $\mathcal{D}_f$ nicht injektiv ist besitzt sie keine Umkehrfunktion
- Eventuell kann das Definitionsintervall so beschränkt werden, dass die Funktion auf $\tilde{\mathcal{D}}_f$ injektiv wird!
- Beispiel:
  - die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv, und besitzt daher keine Umkehrfunktion!
  - dafür ist die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ injektiv, und besitzt eine Umkehrfunktion!
  - auch die Funktion $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist injektiv, und besitzt eine Umkehrfunktion!

Umkehrfunktion



Der Graph der Umkehrfunktion ergibt sich aus der Spiegelung des Graphen von f um die $y = x$ Gerade.

Bestimmung der Umkehrfunktion

Verfahren:

1. Bestimmung der Definitionsmenge $\mathcal{D}_f$, sodass $f : \mathcal{D}_f \to \mathcal{W}_f$ **injektiv ist**
2. Lösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x

Beispiel: $f(x) = x^2 - 4x + 1$

- Monoton auf $(-\infty, 2]$ und $[2, \infty)$; z.B. $\mathcal{D}_f = [2, \infty)$
- Lösen von $y = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{y+3}$
- Da aber $\mathcal{D}_f = [2, \infty)$ ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y+3} \in \mathcal{D}_f$