Übungsblatt 8

Aufgabe 1

	Studienjahr 1	2	3	4	
Schlecht	0	6	3	1	10
Mittel	5	9	1	0	15
Gut	5	5	6	9	25
	10	20	10	10	50

1) Erwartete Anzahlen ergeben sich aus letzten Zeile:

$10/50 = 20\%$; $20/50 = 40\%$;

	Studienjahr 1	2	3	4
S	$\frac{10}{50}\cdot 10$	$\frac{20}{50}\cdot 10$	$\frac{10}{50}\cdot 10$	$\frac{10}{50}\cdot 10$
M	$\frac{10}{50}\cdot 15$	$\frac{20}{50}\cdot 15$	$\frac{10}{50}\cdot 15$	$\frac{10}{50}\cdot 15$
G	$\frac{10}{50}\cdot 25$	$\frac{20}{50}\cdot 25$	$\frac{10}{50}\cdot 25$	$\frac{10}{50}\cdot 25$

1	2	3	4
2	4	2	2
3	6	3	3
5	10	5	5

2) $$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$= \frac{(0-2)^2}{2} + \frac{(6-4)^2}{4} + \frac{(3-2)^2}{2} + \frac{(1-2)^2}{2} + \frac{(5-3)^2}{3} + \frac{(9-6)^2}{6} + \frac{(1-3)^2}{3} + \frac{(0-3)^2}{3}$$

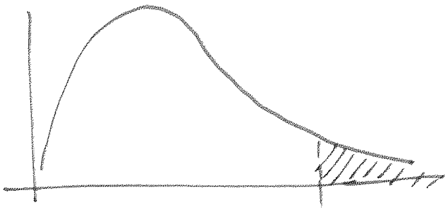
$$+ \frac{(5-5)^2}{5} + \frac{(5-10)^2}{10} + \frac{(6-5)^2}{5} + \frac{(9-5)^2}{5} \approx 17{,}07$$

②

3) Ungefährer P-Wert

Anzahl Freiheitsgrade $= (4-1) \times (3-1) = 6$

Kritischer Wert



$P = 0.01 \rightarrow 16,812$

$P = 0,005 \rightarrow 18,548$

also ist $\boxed{0,005 < P < 0,01}$

Aufgabe 2

1) Mittelwert : $m = 64,9$

Standardabweichung : $s = 1,39$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} n = 7$

Konfidenzintervall: $m - t_{95} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq m + t_{95} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

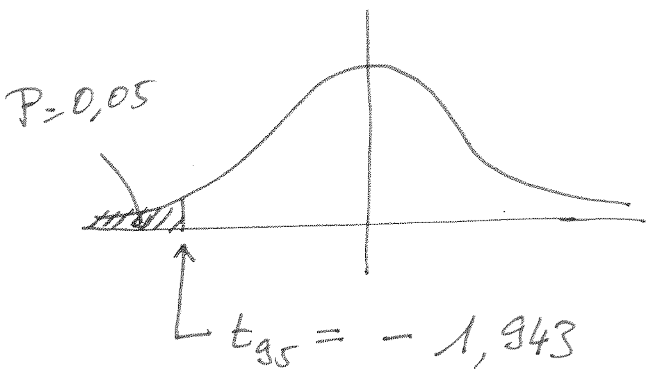
Kritischer Wert der T-Verteilung mit <u>6 Freiheitsgraden</u>

$t_{95} = 1,94$

$$64,9 \pm 1,94 \frac{1,39}{\sqrt{7}} = \begin{cases} 63,88 \\ 65,91 \end{cases}$$

2) Wir führen eine <u>1-seitigen</u> T-Test durch

$$\theta = \frac{64,9 - 65,86}{\frac{s}{\sqrt{7}}} = \underline{-1,81}$$



$\Rightarrow$ also ist θ außerhalb des Signifikanzbereichs

↳ <u>keine signifikante Reduzierung</u>!

Aufgabe 3

1) Mittelwert Toranzahl:

$$m = \frac{1}{50}\left(1\cdot 22 + 2\cdot 5 + 3\cdot 3 + 4\cdot 2\right) = 0,98$$

Standardabweichung der Stichprobe

$$s = \left(\frac{1}{49}\left(18\cdot(0-0,98)^2 + 22(1-0,98)^2 + 5(2-0,98)^2 + 3(3-0,98)^2 + 2(4-0,98)^2\right)\right)^{1/2} = 1,04$$

(4)

Konfidenzintervall: $t_{95} \sim 1,95$

$$\Big[\underbrace{0,98 - t_{95}\frac{s}{\sqrt{50}}}_{0,69} \;,\; \underbrace{0,98 + t_{95}\frac{s}{\sqrt{50}}}_{1,26}\Big]$$

0,57.

2) Annahme $\sigma = 1$; was sollte n sein?

$$0,98 + t_{95}\frac{1}{\sqrt{n}} - \left(0,98 - t_{95}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 0,5$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2t_{95}}{\sqrt{n}} < 0,5$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{n} > \frac{2t_{95}}{0,5} = 4t_{95} \sim 60,84$$

n sollte dann 61 oder mehr sein.

Aufgabe 4

1) $H_0: \mu \leq 0{,}1$ $\qquad H_1: \mu > 0{,}1$

einseitiger t-Test!

~~2)~~ (*) $\theta = \dfrac{\frac{8}{25} - 0{,}1}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ $\qquad n = 25$

Was ist hier s?? Standardabweichung der <u>Anteile</u> der Fliegen-Suppen!

Binomialverteilung: $Var(X) = np(1-p)$

Aber $Var(x)$ ist hier die Varianz der <u>Anzahl</u> der Fliegensuppen (aus 25 Suppen)

also ist $s = \dfrac{Var(X)}{n} = p(1-p) = 0{,}09$

In (*): $\theta = \dfrac{\frac{8}{25} - 0{,}1}{\frac{0{,}09}{\sqrt{25}}} \simeq 3{,}67$

$t_{0{,}975} = 2{,}064$ also ist Test signifikant: $\cancel{H_0}$

Aufgabe 5

1) $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ λ = ~~Mittel~~ Erwartungswert
k = Anzahl, die beobachtet wird.

2) $\lambda = 1{,}8$ $P(4) = \frac{1{,}8^4}{4!} e^{-1{,}8} = 0{,}072$
7,2 %

3) $P(k \geq 4) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) - P(3)$

$P(0) = e^{-1{,}8} = 0{,}165$

$P(1) = 1{,}8\, e^{-1{,}8} = 0{,}297$

$P(2) = \frac{1}{2} 1{,}8^2 e^{-1{,}8} = 0{,}267$

$P(3) = \frac{1}{6} 1{,}8^3 e^{-1{,}8} = 0{,}161$

$P(k \geq 4) = 0{,}108 \sim 11\%$

4) $\lambda = \frac{1}{6}(2+4+3+3+4+2) = 3$ $n = 6$

5) K.I für Poisson Verteilung: $\lambda \pm 1{,}95 \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}}$

$\longrightarrow [1{,}62 \; ; \; 4{,}37]$

Aufgabe 6

1)

	1	2	3	4	5
Umsatz x	60	55	57	61	65
Beschäftigte y	1000	1100	960	840	800

Spearman → Ränge

	1	2	3	4	5
X	3	1	2	4	5
Y	4	5	3	2	1

~~Korrelation~~

$$\overline{X} = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$$

$$Var(Y) = Var(X) = \frac{1}{4}\left((1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}(4+1+1+4) = \frac{5}{2}$$

$$cov(X,Y) = \frac{1}{n-1}\Big[(3-3)\cdot(4-3) + (1-3)(5-3) + (2-3)(3-3) + (4-3)(2-3) + (5-3)(1-3)\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[-4 + (-1) + -4\Big] = -\frac{9}{4}$$

$$cor(X,Y) = \frac{-\frac{9}{4}}{\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}} = -\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{5} = \underline{-\frac{9}{10}}$$

2) Regressionsgerade $y = b_0 + b_1 t$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$$

$$b_1 = cor(y,t)\,\frac{s_y}{s_t}$$

Pearson - Korrelation!

$t = (1, 2, 3, 4, 5)$

$\bar{t} = 3 \qquad Var(t) = \frac{5}{2} \qquad S_t = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$y = (1000, 1100, 960, 840, 800)$

$\bar{y} = 940$

$Var(y) = 14\,800 \qquad S_y = 121,6.$

$$\operatorname{cov}(y,t) = \frac{1}{4}\Big[(1-3)(1000-940) + (2-3)(1100-940)$$
$$+ (3-3)(960-940) + (4-3)(840-940)$$
$$+ (5-3)(800-940)\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\big[-120 - 160 - 100 - 280\big] = -165$$

$$b_1 = \frac{\operatorname{cov}(y,t)}{S_t \cdot S_y} \frac{S_y}{S_t} = \frac{\operatorname{cov}(y,t)}{Var(t)} = -165 \cdot \frac{2}{5}$$

$$= -66.$$

10

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}$$

$$= 940 - (-66) \cdot 3 = 940 + 198 = \underline{1138}$$

$$\boxed{y = 1138 - 66\,t}$$

$t = 8$: $y_8 = 1138 - 66 \cdot 8 = 610$